This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 10:8.46

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

LETTRES

SUR LA

THÉORIE DES PROBABILITÉS,

APPLIQUÉE AUX

SCIENCES MORALES ET POLITIQUES.

LETTRES

à S. A. R.

LE DUC RÉGNANT DE SAXE-COBOURG ET GOTHA,

SUR LA

THÉORIE DES PROBABILITÉS,

APPLIQUÉE

AUX SCIENCES MORALES ET POLITIQUES;

PAR A. QUETELET.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

1846.

Math 1008.46

HARVARD UNIVERSITY
LIBRARY
SEP 06 1985

Des circonstances particulières, qui m'ont laissé de bien doux souvenirs, me mirent, il y aura bientôt dix ans, dans la nécessité de porter toute mon attention sur l'application de la théorie des probabilités à l'étude des sciences morales et politiques.

Je sentis alors combien il était à désirer qu'on pût rendre cette théorie plus élémentaire, et la faire descendre des hautes régions de l'analyse, pour la mettre à la portée des personnes qui sont le plus souvent dans l'obligation de s'en servir. Elle se rattache, en effet, à un grand nombre de questions qui intéressent

à la fois le législateur et l'homme appelé au maniement des affaires publiques; tous deux, d'ailleurs, sont souvent dans la nécessité de lire dans les données statistiques du passé, et de chercher à y saisir tout ce qu'elles peuvent révéler d'utile pour l'avenir; ils sentent le besoin d'apprécier les résultats que produisent les modifications introduites dans les lois, et de peser, en quelque sorte, la valeur des symptômes qui annoncent, dans le mouvement de la population, le malaise ou la prospérité d'un pays.

Cet ouvrage, commencé en 1837, a été écrit sous forme de lettres pour répondre à une demande aussi honorable que flatteuse pour moi; cependant des motifs de convenance me portèrent quelque temps après à suspendre une correspondance à laquelle j'attachais le plus grand prix; et j'aurais cru devoir l'abandonner entièrement, si les augustes princes auxquels elle s'adressait n'avaient daigné m'engager à terminer mon travail, et m'autoriser à le publier sous leurs auspices.

Je sens parfaitement toutes les obligations que m'impose un pareil témoignagne de bienveillance, et j'ai fait mes efforts pour le justifier; il était d'ailleurs bien propre à me dédommager des difficultés que j'ai éprouvées en cherchant à rendre d'un abord facile beaucoup de détails qu'on n'avait pas encore essayé de traduire dans le langage ordinaire : je citerai en par-

ticulier tout ce qui concerne les effets des causes accidentelles dans l'appréciation des grandeurs.

Non content d'avoir exposé les principes de la théorie, j'ai tâché de les démontrer par l'algèbre élémentaire; mais j'ai cru devoir rejeter cette partie dans les notes de l'ouvrage. J'avais déjà publié quelques-uns des principaux résultats dans le tome II du *Bulletin de la commission centrale de statistique de Belgique*, pour faire un premier essai de la marche que je comptais suivre.

A mesure que mon travail prenait plus de développement, j'ai mieux compris la nécessité de le séparer en deux parties; l'une relative à l'application de la théorie des probabilités aux sciences morales et politiques, et l'autre ayant pour objet l'étude des lois qui concernent le développement de l'homme et du corps social.

Ce dernier ouvrage, placé sous les auspices de S. A. R. le prince Albert, fera suite au travail que j'ai publié à Paris en 1834, et qui est intitulé : *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale.*

J'ai cru devoir supprimer en général les dates, la plupart des lettres ayant été modifiées et ne se succédant pas dans l'ordre où elles ont été écrites primitivement.

Je ne me dissimule pas toutes les difficultés qui

se rattachent à l'emploi des méthodes mathématiques dans l'analyse des phénomènes, et surtout des phénomènes moraux. Cette étude, encore nouvelle, a, je le sais, alarmé bien des lecteurs, qui ont cru y voir une tendance à matérialiser ce qui appartient aux plus nobles facultés de l'homme. Je montrerai plus tard combien cette accusation est mal fondée.

Dans l'ouvrage que je présente aujourd'hui, j'examine plus spécialement la marche à suivre pour étudier les phénomènes purement matériels. J'ai donné une attention particulière à la statistique, science sur laquelle on est encore loin de s'entendre, quoiqu'on en reconnaisse généralement l'utilité, lorsqu'elle est cultivée avec discernement. Je suis loin d'avoir la prétention de donner un traité sur cette matière; je me suis simplement borné à signaler plusieurs erreurs dans lesquelles les auteurs tombent fréquemment, et à jeter en avant quelques idées qui m'ont paru propres à éclaircir la théorie *.

Bruxelles, le 18 décembre 1845.

* Je dois des remercîments tout particuliers à M. L. Gruyer, auteur de plusieurs ouvrages philosophiques justement estimés, pour l'obligeance avec laquelle il a bien voulu m'aider, pendant l'impression de mon ouvrage; je dois de pareils remercîments à M. Mailly et à M. le capitaine Liagre, mes aides à l'observatoire royal.

LETTRES

SUR

LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

APPLIQUÉE

AUX SCIENCES MORALES ET POLITIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LA THÉORIE DES PROBABILITÉS.

LETTRE PREMIÈRE.

Nos connaissances et nos jugements ne sont fondés en général que sur des probabilités plus ou moins grandes, qu'il faut savoir apprécier.

Bruxelles, le 30 avril 1857.

L'intérêt que Votre Altesse a semblé prendre à l'étude de la théorie des probabilités, et particulièrement aux applications qu'on peut en faire aux sciences morales et politiques, me donne lieu d'espérer que les nouveaux développements que j'aurai l'honneur de lui présenter, ne seront pas indignes de fixer son attention. Il n'est guère, en effet, de

LETTRES

à S. A. R.

LE DUC RÈGNANT DE SAXE-COBOURG ET GOTHA,

SUR LA

THÉORIE DES PROBABILITÉS,

APPLIQUÉE

AUX SCIENCES MORALES ET POLITIQUES;

PAR A. QUETELET.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

1846.

évidence des faits qui auraient échappé à la sagacité des observateurs les plus exercés et munis des instruments les plus délicats. Qui oserait prétendre cependant que ce principe soit l'expression la plus complète d'une loi de la nature? Qui pourrait affirmer que ce n'est point un cas particulier d'une loi beaucoup plus générale? ou que les résultats qu'on en déduit, ne sont pas des valeurs suffisamment approchées, pour que les quantités négligées ne soient pas appréciables dans l'état actuel de la science? Malgré les raisons que nous avons de ne pas attribuer la certitude au principe de l'attraction, sous son énoncé actuel, nous nous en servons néanmoins avec le plus grand succès pour calculer les phénomènes de notre système planétaire et pour en prédire les retours avec une précision telle, qu'elle est l'objet de l'admiration générale des hommes.

On pourrait en dire autant de la plupart des principes de la physique et de toutes les sciences qui reposent sur l'observation. Nous n'avons pas de motifs suffisants pour les prendre avec certitude, et comme s'ils énonçaient, dans toute sa plénitude, le mode d'action de la nature; mais les probabilités que nous avons pour les considérer comme tels, sont en général si fortes, que nous ne faisons pas difficulté de leur attribuer, dans le plus grand nombre des cas, une valeur équivalente à celle de la certitude.

Il y a une infinité d'intermédiaires entre l'impossible et le certain. Pour aller de l'un à l'autre, la probabilité peut varier en passant par des nuances innombrables; et, sur

cent assertions, il n'en est peut-être pas deux qui présentent le même degré de probabilité. Presque toujours nous apprécions fort mal ces nuances; et, par suite, nos jugements sont plus ou moins grossiers. Pour bien des personnes, les choses ne sont guère probables que d'une seule manière : si la probabilité d'un événement est très-grande, elles la prennent pour la certitude; si elle est très-faible au contraire, elles estiment l'événement impossible.

Les sciences ne sauraient s'accommoder d'appréciations aussi défectueuses. Ces aperçus vagues sont tolérables tout au plus dans les affaires ordinaires de la vie. Ainsi, je regarde comme certain que j'achèverai d'écrire cette phrase sans désemparer; et cependant, avant même que ma plume en ait atteint la fin, une visite inattendue peut me surprendre tout à coup; je puis être frappé d'un accident, être appelé subitement hors de mon cabinet par les cris douloureux d'une personne de la maison, qui se sera blessée en tombant. Tous ces incidents et bien d'autres dont l'énumération serait impossible, ont à mes yeux une probabilité si faible, que je puis fort bien ne pas en tenir compte. Il y a plus, en continuant à en user comme les gens du monde, je ne ferai pas difficulté de regarder comme certain que cette lettre sera terminée et envoyée à Votre Altesse demain au plus tard; et pourtant, ici, les événements imprévus peuvent être bien autrement nombreux. Lors même que je pourrais les éviter tous et m'en rapporter entièrement à mon exactitude, en sera-t-il de même

de celle des personnes qui seront chargées de porter la lettre ou d'en soigner l'envoi? Quant à savoir si la lettre parviendra à sa destination, je regarde sa remise comme probable; je tiens pour tout aussi probable que Votre Altesse, non-seulement recevra ma lettre, mais qu'elle la lira en son entier; et cependant, quoi qu'en puisse dire ma vanité d'écrivain, cette dernière circonstance n'a peut-être que bien peu de chances en sa faveur.

Il serait intéressant de rechercher quelles sont approximativement les limites que la probabilité doit atteindre, pour prendre, aux yeux des gens du monde, les degrés de la certitude ou de l'impossibilité. Ces limites ne sont pas les mêmes pour tous les hommes, ni, chez un même homme, pour toutes les choses indistinctement. Une foule de circonstances influent à cet égard sur nos jugements. Nos passions surtout font mettre bien souvent sur la même ligne, des événements dont les probabilités sont essentiellement différentes. Les variations de la probabilité sont pour l'entendement, ce que les nuances des couleurs sont pour un œil exercé, ou ce que l'échelle diatonique serait pour l'oreille qui pourrait en apprécier tous les degrés.

A la théorie des probabilités se rattachent un grand nombre de questions qui sont de nature à exciter la curiosité et qui méritent au plus haut point l'attention du philosophe et de l'homme d'état. C'est ce que Votre Altesse a fort bien compris, et ce dont elle pourra se convaincre mieux encore par la suite. Parmi les applications diverses que l'on peut

faire de cette théorie, je choisirai de préférence celles qui se rapportent à l'homme et à son état social; nous y trouverons une mine féconde de découvertes utiles, que nos prédécesseurs ont à peine entrevue et qui reste encore presque entièrement à exploiter.

Le calcul des probabilités n'est que l'instrument qui doit servir à régulariser les travaux d'exploitation; mais il devient indispensable dans les recherches auxquelles nous voulons nous livrer. Il doit nous servir en effet à distribuer avec avantage la série de nos observations, à estimer la valeur des documents dont nous ferons usage, à distinguer ceux qui exercent le plus d'influence, à les combiner ensuite de manière qu'ils s'écartent le moins possible de la vérité, et à calculer en définitive le degré de confiance qu'on peut attacher aux résultats obtenus. La théorie des probabilités ne nous enseigne au fond qu'à faire avec plus de régularité et de précision, ce qu'ont fait jusqu'à présent, d'une manière plus ou moins vague, les esprits même les plus judicieux. Elle tend surtout, dans les phénomènes dont nous aurons à nous occuper, à substituer la science à ce que l'on est convenu de nommer la pratique ou l'expérience, et qui n'est, la plupart du temps, qu'une aveugle routine.

Sous ce rapport encore, les préjugés sont si fortement enracinés, les préventions sont telles que l'on entend, à chaque instant, les assertions les plus étranges dans la bouche de personnes fort habiles d'ailleurs. C'est un fait aujourd'hui bien constaté, quoiqu'on en ignore encore la véritable cause,

qu'il naît généralement plus de garçons que de filles. Eh bien, énoncez ce fait devant un accoucheur qui n'en ait pas connaissance; il vous dira sans doute que le contraire résulte de sa pratique. Demandez alors combien d'observations comprend sa pratique, il vous répondra, sans se faire faute d'exagérer, qu'il pourrait en citer plus de mille; que dis-je, plus de deux mille, plus de trois mille! Demandez encore s'il a pris soin d'enregistrer toutes ces observations avec leurs résultats, et il fera aussitôt un appel à sa mémoire. Vous verrez alors que ces deux ou trois mille observations qu'il mettait en avant, se réduisent tout simplement à celles qui l'auront plus particulièrement frappé, et qui auront contribué à former ce qu'il nommait sa pratique.

Or, les jugements que nous nous formons reposent, le plus souvent, sur des bases tout aussi peu solides. Ce que la science était en droit de demander au praticien auquel je viens de faire allusion, c'est qu'il enregistrât soigneusement les faits et qu'il ne les confiât pas à sa mémoire; qu'il fît une *énumération complète*, et qu'il ne se bornât pas à citer des faits isolés qui avaient plus spécialement fixé son attention, parce qu'ils étaient peut être mieux d'accord avec ses préjugés. Enfin, en supposant même que les indications eussent été prises avec le plus grand soin, en dehors de tout esprit de système, et au nombre de trois mille, elles n'auraient pas été en quantité suffisante pour établir un jugement avec le degré de probabilité convenable. Le nombre des naissances masculines surpasse en effet de très-peu le nombre

des naissances féminines; le rapport est de 106 à 100 environ pour toute l'Europe. Quand on opère sur une grande population, sur celle d'un royaume par exemple, ce rapport est à peu près invariable d'une année à l'autre; mais il peut osciller dans des limites assez larges, quand il s'agit d'une ville populeuse, où il n'est pas rare de voir, pendant une année, naître plus de filles que de garçons. C'est ainsi que notre praticien aurait pu, même en faisant une assertion exacte, ne pas infirmer le fait généralement observé. Son erreur tiendrait à ce qu'il aurait tiré des conclusions de nombres trop faibles pour mettre en évidence le fait qu'il voulait constater. Son résultat n'avait pas le degré de probabilité nécessaire pour pouvoir être accepté avec confiance.

La plupart des erreurs et des discordances que l'on trouve dans les ouvrages de statistique n'ont pas d'autre source; et les gens du monde ont grand tort, en pareil cas, de s'en prendre à la science plutôt qu'aux calculateurs, qui devraient seuls en être responsables.

Pour ne pas nous engager dans une fausse route, il sera prudent de rappeler sommairement les principes de la théorie des probabilités, avant de nous livrer à des recherches sur la manière de procéder dans les sciences d'observation et dans la statistique en particulier; ce sera l'objet de mes prochaines lettres.

LETTRE II.

De la probabilité mathématique d'un événement simple. Difficulté de rendre les chances égales.

Bruxelles, le 29 mai 1857.

Je suis heureux d'apprendre par la lettre que Votre Altesse m'a fait l'honneur de m'adresser, qu'elle apprécie l'utilité, et j'oserais dire, le plaisir qui se rattache au genre d'études qui va nous occuper. Si quelque chose cependant a pu m'être pénible dans la lecture de cette lettre, c'était de voir que Votre Altesse a été indisposée dès son arrivée à Bonn.

J'espère que les détails sur lesquels je dois fixer son attention, ne seront pas trop arides pour un convalescent. Les principes des sciences présentent rarement quelque attrait; mais si l'entrée de l'édifice n'en est pas la partie la plus brillante, il importe au moins qu'elle soit d'un accès facile et convenablement éclairée. Je demanderai donc la permission de rappeler quelques principes de la théorie des probabilités, afin de bien nous entendre sur la valeur de plusieurs mots qui se reproduiront assez fréquemment.

Lorsque différents cas peuvent donner naissance à un événement, on les nomme les *chances* de cet événement. Ainsi, le tirage d'une carte dans un jeu ordinaire, présente

32 chances, puisque l'on peut prendre indifféremment l'une des 32 cartes dont le jeu se compose.

Quand la nature de l'événement qu'on espère est désignée, il existe deux espèces de chances, les unes *favorables* et les autres *contraires* à l'événement espéré. Ainsi, celui qui désirerait prendre une figure dans un jeu de 32 cartes, aurait 12 chances pour lui; et 20 chances lui seraient contraires.

Si toutes les chances sont favorables, leur ensemble constitue la *certitude*.

On dit, d'une manière absolue, qu'un événement est *probable*, quand quelques chances sont contraires à son arrivée, et qu'il est *possible* seulement ou peu probable, quand le nombre des chances contraires surpasse le nombre des chances favorables.

On conçoit que tous les événements ne sont pas également probables. *On estime la probabilité mathématique en divisant le nombre des chances favorables à l'événement, par le nombre total des chances.* D'après ce principe, le tirage d'une figure dans un jeu de 32 cartes aurait, pour probabilité, la fraction $\frac{12}{32}$; on a, en effet, 12 chances favorables sur un nombre total de 32 chances.

La probabilité *contraire* à l'événement attendu s'estime de la même manière; c'est-à-dire, en divisant le nombre des chances défavorables par le nombre total des chances. Ainsi, dans l'exemple précédent, la probabilité contraire à l'événement attendu est $\frac{20}{32}$.

En général, chaque événement incertain donne lieu à deux

probabilités opposées, savoir : celle que cet événement arrivera, et celle qu'il n'arrivera pas : *la somme de ces deux probabilités doit être égale à l'unité.* L'unité devient ainsi le symbole de la certitude.

L'application de la théorie des probabilités ne présenterait guère de difficultés, si l'on pouvait toujours énumérer les diverses chances possibles, et si toutes les chances étaient rigoureusement les mêmes. Mais il n'en est pas ainsi ; et, dans certains cas, il faut beaucoup de sagacité pour ne pas commettre des erreurs graves dans ces sortes d'appréciations. De tous les jeux, le plus simple est sans contredit celui de pile ou croix, puisqu'il n'y a que deux chances possibles, et que la pièce doit tomber nécessairement sur l'une ou l'autre de ses deux faces. La probabilité de chacun des deux événements est donc $\frac{1}{2}$. Cependant si la pièce n'était pas homogène, si elle était construite de manière à tomber plus facilement sur une face que sur l'autre, il est évident que les deux probabilités ne pourraient plus être représentées respectivement par la fraction $\frac{1}{2}$. Si la pièce, par exemple, tombait régulièrement deux fois sur une face, tandis qu'elle ne tomberait qu'une fois sur l'autre, on pourrait considérer le jet de cette pièce comme présentant trois chances possibles, dont deux pour une face et une seule pour l'autre face : les probabilités respectives seraient $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

Des joueurs frauduleux se ménagent quelquefois des avantages semblables, en jouant avec des dés pipés. Quand un

dé à six faces est bien construit, il doit pouvoir tomber avec une égale facilité sur chacune de ses faces : le jet de l'as, par exemple, doit avoir la même probabilité que celui de tout autre point. Cependant on peut altérer le dé, soit sous le rapport de l'homogénéité de la matière, soit sous le rapport de la forme, de manière à rendre la probabilité du jet de l'as aussi grande ou aussi petite que l'on veut.

On conçoit qu'on pourrait jouer avec un dé semblable, pourvu que l'on pût tenir rigoureusement compte de l'inégalité des chances pour l'arrivée de chaque point.

La difficulté que nous rencontrons ici, se reproduit à chaque instant dans l'appréciation des probabilités concernant les phénomènes de la nature. La difficulté devient plus grande encore, en ce que le dé, pour continuer notre comparaison, non-seulement présente des faces inégales, mais que l'on ne sait pas même au juste combien il a de faces.

Telle est bien effectivement la condition dans laquelle nous met la nature, quand nous cherchons à sonder ses secrets et à évaluer les probabilités respectives des événements qui peuvent arriver.

On croit souvent avoir tout prévu, avoir soigneusement énuméré les circonstances qui pouvaient se présenter, et l'on se trouve très-étonné de voir que l'événement arrivé n'est aucun de ceux qu'on attendait. On dit alors que c'est le hasard qui l'a amené; mais que signifie ce mot, sinon l'ignorance où nous étions que notre dé avait encore une face que nous n'avions pas aperçue et sur laquelle nous ne supposions

pas qu'il dût tomber. Le mot *hasard* sert officieusement à voiler notre ignorance; nous l'employons pour expliquer des effets dont nous ne connaissons point les causes. Pour qui saurait tout prévoir, il n'y aurait pas de hasard; et les événements qui nous paraissent les plus extraordinaires, auraient leurs causes naturelles et nécessaires, comme les événements qui nous semblent les plus communs.

Une autre comparaison puisée également dans la théorie du jeu, pourra nous prêter de nouvelles lumières. Supposons qu'on nous présente une urne remplie de boules qui ne diffèrent entre elles que par la couleur, et qu'on demande la probabilité que la première boule tirée sera blanche. Il est évident que, pour porter un jugement motivé, il nous faudra des renseignements préalables. Pour que ces renseignements soient complets, nous viderons l'urne et nous examinerons combien de boules de chaque couleur s'y trouvent contenues. Or, je suppose qu'il y en ait deux blanches, trois noires et quatre rouges, en tout neuf boules; nous devrons répondre que la probabilité que la première boule tirée sera blanche, est $\frac{2}{9}$.

Cette évaluation, comme l'on voit, ne présente pas de difficulté, quand on peut s'assurer du nombre de boules que contient l'urne, et de la manière dont ces boules sont distribuées sous le rapport de la couleur. En général, dans les différents jeux, qu'on nomme jeux de hasard, le nombre des chances est limité et leur nature est connue; mais il n'en est pas de même dans ce qui se rapporte aux sciences

d'observation. L'urne est ouverte devant nous; il nous est permis de faire autant de tirages que nous le voulons, de multiplier les épreuves à loisir, mais cette urne est inépuisable, et ce n'est que par induction que nous pouvons connaître ce qu'elle renferme.

Nous sommes donc réduits à partir de considérations nouvelles, pour estimer la probabilité d'un événement quand le nombre des chances est illimité, et que nous ignorons comment les chances sont distribuées. Cet inconvénient se présente malheureusement dans le plus grand nombre des cas qui doivent nous occuper, c'est-à-dire dans l'appréciation des probabilités des phénomènes sociaux et des phénomènes naturels. Cette appréciation est assez importante pour former le sujet d'une lettre particulière, et elle offre assez d'intérêt pour que je présume que Votre Altesse désirera ne pas voir différer les explications dans lesquelles je serai forcé d'entrer.

LETTRE III.

De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite se reproduira encore.

Ostende, le 25 juillet 1857.

.....Je profite aujourd'hui des premiers instants de loisir que j'ai trouvés à Ostende, pour reprendre une correspondance que je regrette vivement d'avoir interrompue. Le lieu d'où j'écris est cher à Votre Altesse; je serais heureux si ma lettre pouvait rapprocher les distances.

Pour ne pas trop m'écarter du moins de cette illusion, je prierai Votre Altesse de se transporter par la pensée, sur le rivage de la mer; c'est là que nous aurons aujourd'hui notre paisible conférence, sur le bord de cet immense océan dont l'œil ne saisit pas plus les limites, que l'intelligence humaine ne peut embrasser les bornes du vaste champ de la science.

Nous voici donc devant ces vagues écumantes qui semblent envahir, dans leur marche triomphale, la plage doucement inclinée qu'elles avaient abandonnée, il y a quelques instants. Leurs lignes blanches et mugissantes se suivent de près et se déroulent majestueusement, comme les rangs serrés d'une armée qui s'avance en bon ordre et pousse son

cri de guerre en s'élançant sur l'ennemi. Déjà elles battent avec vigueur et couvrent de leur écume ces longues jetées et ces palissades que l'industrie humaine a placées au loin dans la mer, comme des sentinelles avancées, destinées à protéger la marche des vaisseaux. Ce spectacle est sublime, mais il faut savoir le comprendre. Il effraya, dit-on, les peuples barbares qui anciennement ravagèrent notre pays et tentèrent de combattre à coups d'épée ce nouvel ennemi qui semblait vouloir disputer leur conquête. Quelque absurde que nous paraisse cet acte de folie, nous pouvons nous l'expliquer. En effet, si nous n'avions aucune idée du phénomène des marées, et si, placés devant l'océan, nous apercevions tout à coup l'envahissement de ses eaux, nous reculerions épouvantés, et nous pourrions craindre que cet envahissement progressif, gagnant de proche en proche, ne nous engloutît avec le sol sur lequel nous marchons : nous regarderions sans aucun doute cet événement comme un prodige.

Mais le retrait des eaux, qui aurait lieu bientôt après, nous rendrait l'espérance, et, quand la mer monterait à la marée suivante, nous n'éprouverions plus notre première frayeur. Au bout de quelques jours même, frappés de la régularité du phénomène, nous finirions par ranger parmi les événements ordinaires ce que nous avions considéré d'abord comme un prodige. Il y a plus, nous serions très-étonnés de ne plus voir, après le retrait des eaux, se reproduire le mouvement ascensionnel qui avait causé notre premier effroi; nous com-

mencerions déjà à en regarder la reproduction comme probable, sans savoir même s'il se reproduit en vertu de causes constantes ou s'il est purement accidentel.

Il en est à peu près de même de quantité d'événements qui ont causé autrefois l'étonnement et la frayeur des hommes, tels que les éclipses, les apparitions de comètes et d'autres phénomènes qui ont été si souvent exploités par des fourbes dans les siècles d'ignorance.

Si nous avons recours à la science, elle nous donne la règle suivante pour estimer la probabilité du retour d'un événement qui déjà s'est reproduit périodiquement plusieurs fois de suite, il faut *diviser le nombre de fois que l'événement a été observé, augmenté de l'unité, par le même nombre augmenté de deux unités.* Ainsi, après avoir vu la mer monter périodiquement dix fois de suite, à douze heures et demie d'intervalle environ, la probabilité qu'elle montera encore une onzième fois, serait $\frac{10+1}{10+2}$*, ou $\frac{11}{12}$.

Maintenant que nous avons vu la marée, après une série de siècles, se reproduire sur nos côtes de la manière la plus régulière, nous pouvons regarder, vers le moment de la basse mer, le mouvement ascensionnel des eaux qui va suivre, comme présentant une probabilité à peu près équivalente à la certitude. En sorte que, contrairement à ce que l'on a pu croire d'abord, on regarderait comme une chose

* Ce signe + indique qu'il faut ajouter les deux nombres qu'il sépare, et se prononce *plus* : (10 plus 1 divisé par 10 plus 2).

extraordinaire ou prodigieuse que la mer ne s'élevât pas à l'heure de la marée.

On considèrerait également comme une chose extraordinaire que le soleil qui en ce moment brille avec tant de majesté au-dessus des eaux, ne finît point par s'abaisser graduellement, pour disparaître ensuite au-dessous du niveau des mers. L'habitude de voir ce spectacle et nos connaissances astronomiques nous ont familiarisés depuis longtemps avec ce phénomène, qui, sans doute, paraîtrait inexplicable si l'on pouvait en être témoin pour la première fois, et sans y être préparé. Les anciens étaient loin de pouvoir s'en rendre compte; plusieurs philosophes grecs avaient même sur sa nature les idées les plus étranges. Quelques-uns regardaient le soleil comme une masse enflammée qui, tous les soirs, se plongeait dans les eaux de la mer; et ils prétendaient avoir entendu un bruissement pareil à celui que produit un fer rouge qu'on enfonce dans l'eau.

Quelle que puisse avoir été la difficulté d'expliquer le coucher du soleil, il n'est certes personne qui n'ait fini par croire à la nécessité de son retour périodique, et par regarder même l'arrivée de cet événement comme une certitude.

Pour nous, dont les connaissances sont plus avancées, et qui pouvons nous expliquer le phénomène de la manière la plus simple et la plus satisfaisante, nous ne regardons cependant son retour que comme une probabilité. D'où naît cette contradiction apparente? Votre Altesse a déjà vu qu'en

général les hommes n'admettent pas de nuances dans les degrés de probabilité des événements qui se passent autour d'eux. Une chose ne peut être à leurs yeux que très-douteuse ou certaine. Cependant nous n'avons que des probabilités, extrêmement grandes à la vérité, de croire que les lois naturelles que nous voyons se manifester avec tant de régularité, se manifesteront encore de même par la suite. Nous ignorons par exemple si, par le choc d'une comète ou par d'autres causes, notre planète, en circulant autour du soleil, ne sera pas assujettie, un jour, à tourner constamment la même face vers cet astre, comme le fait la lune à l'égard de notre terre; ce qui produirait perpétuellement dans un de nos hémisphères le jour, et, dans l'autre, la nuit. Déjà, dans nos régions polaires, on peut se faire une idée d'un pareil ordre de choses, bien qu'il soit difficile de prévoir le bouleversement général qui se manifesterait parmi les animaux et les plantes. Je laisse à l'imagination le soin de remettre chaque chose dans le lieu qui lui conviendrait le mieux, et j'en reviens à des considérations plus positives.

D'après ce que nous avons vu précédemment, voici comment on calculerait la probabilité du coucher du soleil, en faisant abstraction des autres motifs scientifiques que nous avons maintenant de croire à son retour. Au 1er janvier 1837, on avait compté 5841 ans ou 2,131,965 couchers du soleil depuis la création, que nous faisons remonter à 4004 ans avant l'ère chrétienne. La probabilité qu'un nouveau retour devait avoir lieu à cette époque, était donc $\frac{2.131.966}{2.131.967}$, c'est-à-dire

une fraction approchant tellement de l'unité, qu'on peut la considérer comme l'équivalent de la certitude.

Il faut remarquer que l'arrivée d'un second coucher du soleil présente une probabilité moins grande, et que les probabilités des couchers du soleil deviennent d'autant plus faibles, qu'on les calcule pour des époques futures plus reculées. La fraction qui exprime la probabilité d'un coucher éloigné pourrait même varier assez sensiblement, pour cesser d'avoir la valeur de la certitude, même aux yeux du vulgaire.

Dans les sciences d'observation, et en particulier dans l'application de la théorie des probabilités aux événements sociaux, il importe de bien remarquer que la connaissance intime du passé peut conduire à prononcer avec une presque certitude sur ce qui va arriver prochainement; mais les déductions que nous faisons deviennent d'autant moins probables que nos prévisions s'étendent plus loin dans l'avenir. Ainsi, pour calculer la probabilité qu'un événement, observé un nombre quelconque de fois de suite, se reproduira encore plusieurs fois, on doit suivre cette règle : *La probabilité vaut une fraction qui a, pour numérateur, le nombre des observations faites plus* 1; *et, pour dénominateur, le même nombre plus* 1, *et plus encore le nombre de fois que l'événement doit se reproduire.* Ainsi la probabilité de la reproduction de cinq retours successifs du coucher du soleil était, au 1er janvier 1837, $\frac{2.131.966}{2.131.971}$.

Pour me servir d'une comparaison, dont l'illustre Laplace a fait usage dans une circonstance différente de celle-ci, on

peut assimiler ce qui se passe à la manière dont on verrait les choses par l'interposition d'un ou de plusieurs verres, qui produiraient graduellement l'extinction de la clarté des objets, selon que nos prévisions s'étendraient plus loin de nous.

LETTRE IV.

De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite, dépend d'une cause qui facilite sa reproduction.

Bruxelles, le 25 octobre 1837.

.... Dans ma dernière lettre, j'ai eu l'honneur d'exposer à Votre Altesse comment, après avoir observé plusieurs reproductions d'un même événement, on calcule la probabilité que cet événement se manifestera encore une ou plusieurs fois. Nous avons eu l'occasion de le remarquer, la probabilité acquiert d'autant plus d'importance que le nombre de fois que l'événement a été observé, se trouve être plus grand, et que nos prévisions s'étendent moins loin dans l'avenir.

Il se présente ici naturellement une seconde question, c'est celle de savoir si l'événement qu'on a vu se reproduire plusieurs fois de suite, dépend ou d'une seule et même cause ou du concours d'un certain nombre de causes, ou bien encore s'il est purement accidentel. Ainsi, pour en revenir à l'exemple que j'ai choisi, on a dû se demander s'il existait une cause ou un concours de causes qui favorisât le retour périodique des marées. Et cette question

relative à l'origine du phénomène, a dû se faire presqu'en même temps que celle qui se rapportait à sa prochaine reproduction. Or, cette question si naturelle à la curiosité des hommes et à laquelle le bon sens aurait déjà trouvé une réponse approximative, a encore été résolue par la théorie des probabilités.

On sentait fort bien que, plus l'événement s'était manifesté de fois dans les mêmes circonstances, plus il devenait probable qu'il était le résultat d'une cause unique ou de plusieurs causes simultanées; mais cette probabilité se présentait sous une forme vague : le géomètre anglais Bayes proposa la règle suivante pour en apprécier la valeur : *Quand on a observé plusieurs fois de suite un même événement, la probabilité qu'il existe une cause qui en facilite la reproduction, est exprimée par une fraction qui a, pour dénominateur, le nombre* 2, *multiplié autant de fois par lui-même que l'événement a été observé de fois, et pour numérateur, le même produit moins* 1.

Après avoir vu monter la mer périodiquement dix fois de suite, à douze heures et demie de distance environ, si l'on se demande quelle est la probabilité qu'elle montera encore une onzième fois, on aura, comme je l'ai déjà dit, $\frac{11}{12}$. De plus, d'après le principe précédent, la probabilité qu'il existe une cause qui nécessite la reproduction de ce phénomène, sera $\frac{2047}{2048}$.

Votre Altesse voit que nous avons plus de raisons de croire à l'existence d'une cause qui a facilité dix fois de suite la re-

production du même phénomène dans les mêmes circonstances, qu'à sa reproduction prochaine pour la onzième fois. Cette distinction, la science seule nous permet de l'établir; et le simple bon sens, quelle que fût son étendue, ne serait point parvenu à la faire, même approximativement.

En général, la probabilité qu'il existe une cause qui nécessite la reproduction d'un événement observé plusieurs fois de suite, croît beaucoup plus rapidement que la probabilité du prochain retour de cet événement. Cela résulte des formules mêmes qui servent à calculer les probabilités respectives.

J'ai eu occasion d'observer, en 1835, dans la nuit du 10 au 11 août, une grande quantité d'étoiles filantes; il en avait été de même en 1834. Ces observations furent enregistrées, et je les perdis ensuite de vue, jusque vers la fin de l'année dernière, époque à laquelle je revins sur les apparitions extraordinaires des étoiles filantes, dont je m'étais beaucoup occupé dans ma jeunesse. Je pus constater alors que le même phénomène, d'après divers observateurs, s'était reproduit plusieurs fois à la même époque de l'année. Dès lors je me crus en droit, non-seulement de conclure qu'il existait très-probablement une cause qui facilitait ce retour, mais encore d'annoncer la probabilité d'un retour prochain. C'est ce que je fis en effet, et l'événement confirma mes conjectures. Je suis parvenu maintenant à constater, depuis le commencement de ce siècle, dix-huit retours périodiques vers le milieu d'août, et j'ai lieu de croire que ce spectacle, qui du reste ne semble pas visible pour tous les points du globe

simultanément, a pu, pendant les autres années de ce siècle, échapper à l'attention, soit par le manque d'observateurs, soit par l'obstacle des temps couverts.

La cause qui a donné naissance à ce phénomène ne s'est-elle manifestée que dans ces derniers temps et continuera-t-elle indéfiniment son action? Agira-t-elle d'une manière intermittente et à des intervalles plus ou moins longs?

Il pourrait en être des étoiles filantes comme des pluies ordinaires. Une succession de mauvais jours n'augmente pas la probabilité d'en avoir encore. L'expérience nous a fait connaître, en effet, que les pluies ont des intermittences plus ou moins longues; et, quand elles se prolongent avec excès, la probabilité de leur continuation, bien loin d'augmenter, diminue.

LETTRE V.

De la probabilité qu'un événement observé un certain nombre de fois, dans un nombre donné d'épreuves, se reproduire encore.

J'ai supposé jusqu'à présent que l'événement attendu ne se manifeste que d'une manière; mais Votre Altesse conçoit que ce cas est en quelque sorte exceptionnel. Il se présentera en général deux espèces d'événements, les uns favorables et les autres contraires à l'attente. Or, la théorie offre le moyen suivant pour calculer la probabilité qu'une de ces deux espèces d'événements se reproduira encore une fois. *Il faut diviser le nombre de fois que l'événement a été observé plus* 1, *par le nombre total des observations plus* 2.

Je vais donner un exemple de ce calcul. D'après différentes observations faites jusque dans ces derniers temps, on avait cru reconnaître que, non-seulement les mouvements de translation, mais encore les mouvements de rotation des planètes et de leurs satellites s'accomplissent de la même manière. « Un phénomène aussi remarquable, dit Laplace, dans son *Essai philosophique sur les probabilités*, n'est point l'effet du hasard : il indique une cause générale qui a déterminé tous les mouvements. Pour avoir la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée, nous observe-

rons que le système planétaire, tel que nous le connaissons aujourd'hui, est composé de onze planètes et de dix-huit satellites, du moins si l'on attribue avec Herschel, six satellites à la planète Uranus. On a reconnu les mouvements de rotation du Soleil, de six planètes, de la Lune, des satellites de Jupiter, de l'anneau de Saturne, et de l'un de ses satellites. Ces mouvements forment avec ceux de révolution un ensemble de 43 mouvements dirigés dans le même sens; or, on trouve par l'analyse des probabilités qu'il y a plus de quatre mille milliards à parier contre un que cette disposition n'est pas l'effet du hasard; ce qui forme une probabilité bien supérieure à celle des événements historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute. »

Nous ajouterons qu'avec les données précédentes, et dans le cas de la découverte d'une nouvelle planète, la probabilité que le mouvement de translation de cet astre autour du soleil aurait lieu encore dans le même sens, devrait être représentée par la fraction $\frac{44}{45}$.

Mais il se trouve aujourd'hui qu'après avoir soumis Uranus et ses satellites à de nouvelles observations très-délicates et qu'on ne peut faire qu'avec les plus puissants instruments, sir John Herschel, fils du célèbre astronome à qui l'on doit la découverte de cet astre, est parvenu à reconnaître, comme son père l'avait annoncé, que deux des satellites, dont les orbites font avec l'écliptique des angles très-grands, effectuent leur mouvement de translation, non pas d'Occident en Orient, mais en sens contraire.

Cette découverte doit nécessairement modifier les résultats des calculs que j'ai cités plus haut; les choses se présentent sous un autre point de vue. Nous avons en effet sur 43 mouvements, soit de translation, soit de rotation, observés jusqu'à ce jour, non pas 43, mais 41 mouvements directs, et 2 mouvements rétrogrades; ce qui donne pour la probabilité, que, si l'on découvre encore une planète ou un satellite, le mouvement sera direct, la fraction $\frac{42}{45}$; et, pour la probabilité contraire, $\frac{3}{45}$.

Quand il existe plusieurs espèces d'événements possibles, et que l'on veut calculer la probabilité de chacun d'eux, d'après les observations antérieures, les calculs deviennent assez compliqués. Heureusement on peut ramener l'appréciation à un principe très-simple, et ce qu'on néglige sous le rapport de la rigueur est fort peu de chose, quand les observations sont nombreuses. Voici ce principe : *On peut considérer les chances favorables et les chances défavorables comme étant numériquement dans le même rapport que les événements observés auxquels elles se rapportent.*

Je rendrai cette proposition sensible par un exemple: supposons qu'on nous présente une urne contenant un nombre considérable de boules de couleurs différentes, et qu'on demande la probabilité que la première boule tirée sera blanche. Il est évident que pour répondre à cette question, il faudrait connaître le nombre de boules que contient l'urne, ainsi que leurs couleurs. Le problème alors se résoudrait à priori, comme je l'ai dit dans une de mes lettres

précédentes. Mais cette connaissance n'existant pas, pour me faire une première idée sur le contenu de l'urne, j'en extrais quelques boules; et je les remets successivement dans l'urne après chaque tirage, afin que les choses rentrent dans les mêmes circonstances.

Si, après un certain nombre de tirages, je n'ai fait sortir de l'urne que des boules blanches et des boules noires, je puis croire que l'urne en effet ne contient que des boules de ces deux couleurs. Si je multiplie les tirages pendant toute une journée, et si je continue à obtenir toujours les mêmes résultats, mon jugement en aura d'autant plus de poids.

Admettons, pour un moment, que le nombre des boules blanches tirées soit sensiblement égal au nombre des boules noires; j'aurai des raisons de croire que la réalité est conforme aux résultats de l'expérience, et que les boules blanches et noires sont réparties dans l'urne en proportions égales. Si le nombre des boules blanches prédominait au contraire, j'en serais pareillement averti par les épreuves successives que j'aurais faites. Le rapport du nombre des boules blanches au nombre des boules noires, après un grand nombre de tirages, se serait d'autant plus rapproché du rapport qui existe réellement dans l'urne, que les expériences auraient été répétées davantage.

Je puis donc reconnaître avec un degré de précision aussi grand que je le veux, en multipliant suffisamment les épreuves : 1° que l'urne ne renferme que des boules blanches

et des boules noires; 2° le rapport numérique qui existe entre les boules de chaque couleur.

Or l'urne que nous interrogeons, c'est la nature. Nous pouvons multiplier nos expériences à l'infini; nous ne devons pas même user de la précaution de remettre les boules dans l'urne, car ce qu'on en tire, n'altère pas les proportions de ce qui reste; c'est moins qu'une goutte d'eau puisée dans le sein de l'Océan.

On me demande s'il naît autant de garçons que de filles. Pour me procurer les moyens de répondre et me rapprocher de l'exemple choisi précédemment, je puis assimiler chaque naissance au tirage d'une boule dans une urne dont je ne connais pas le contenu. Après un nombre suffisant d'observations, je compte les garçons et les filles. Supposons que cette épreuve ait été faite pendant toute l'année 1841 et dans toutes les communes rurales de la Belgique, nous aurons compté 53,437 naissances masculines et 49,788 naissances féminines. Le premier nombre est plus grand que le second, faut-il en conclure que c'est par suite d'une loi de la nature qui facilite les naissances masculines? ou bien l'excès d'un des nombres sur l'autre n'est-il qu'accidentel?

Il faut, pour acquérir plus de lumières à cet égard, recourir aux résultats d'une ou de plusieurs autres années. Le rapport des deux nombres précédents est exprimé par 1,072; c'est-à-dire qu'on a compté ce nombre de naissances masculines pour 1,000 naissances féminines. Mais le rapport calculé pour neuf années, de 1834 à 1842, a donné à peu

près exactement le même nombre, c'est-à-dire 1,063. Il y a donc véritablement une prédominance en faveur des naissances masculines, et le rapport est à peu près exactement tel que nous l'avons trouvé par les nombres de 1834 à 1842.

Un autre exemple, et je l'emprunterai à la météorologie, fera mieux comprendre l'application de notre principe. Supposons qu'il s'agisse de vérifier si les indications du baromètre sont de quelque valeur pour annoncer le temps; et que, sur 1,175 observations, nous trouvions 758 cas où le baromètre était en baisse à l'approche de la pluie, et 417 où il avait un mouvement ascensionnel. Nous pourrons en conclure qu'il faut, d'après l'expérience, compter, toutes choses égales d'ailleurs, 758 chances sur 1,175, en faveur de la baisse du baromètre à l'approche de la pluie, ce qui assigne à cet événement la probabilité $\frac{758}{1175}$; on aurait $\frac{759}{1177}$, en calculant d'après la méthode indiquée au commencement de cette lettre.

Ces deux valeurs diffèrent un peu entre elles; elles ont été déduites des observations faites par Poleni dans les environs de Padoue. Van Swinden, en se livrant à des recherches analogues à Franeker, pendant l'année 1778, a trouvé qu'à l'approche de la pluie, le baromètre a monté presque exactement autant de fois qu'il a descendu, de façon que cet instrument ne serait absolument d'aucune valeur pour ces sortes d'appréciations.

Ces résultats peu concordants peuvent s'expliquer, si l'on

considère le nombre infini de causes différentes qui agissent sur le baromètre et qui rendraient nécessaires des observations bien plus nombreuses que celles qu'on a recueillies jusqu'à présent. Pour que les résultats fussent rigoureusement comparables, il faudrait qu'ils eussent été obtenus dans les mêmes circonstances atmosphériques et sous le même climat. Ces sortes d'appréciations sont très-délicates; il est de la plus grande importance de bien considérer, avant d'établir de pareilles comparaisons, si les urnes qui servent aux épreuves, pour en revenir à notre premier exemple, sont identiquement les mêmes, quant à la manière dont les boules des différentes couleurs s'y trouvent réparties.

LETTRE VI.

De la probabilité mathématique d'un événement composé.

En relisant la fin de ma précédente lettre, je me suis demandé s'il n'aurait pas convenu de passer sous silence l'exemple relatif aux indications du baromètre. Cet exemple est peut-être mal choisi, mais il aura du moins l'avantage de nous suggérer quelques remarques utiles.

La variation barométrique dépend rarement d'une cause unique; elle est en général un événement complexe qui est le produit d'un grand nombre de causes; et il en est de même de la chute de la pluie. Ces causes d'ailleurs peuvent varier par des nuances infinies et agir soit individuellement, soit en se combinant entre elles de différentes manières; enfin, toutes celles qui agissent sur le baromètre, n'ont pas également d'action pour amener la pluie. Il faudrait donc avoir égard aux probabilités de chacune d'elles, quand elles concourent pour produire l'événement attendu.

Il existe bien peu d'événements qui ne soient composés. Nos moindres projets supposent un ensemble de causes qui, toutes, doivent être favorables, pour que nous puis-

sions réussir selon notre attente. Nous renoncerions à projeter, surtout quand il s'agit d'un terme un peu reculé, si nous calculions combien nous avons de probabilités d'éprouver des déceptions.

J'aurais le dessein de faire, pendant le cours de cet été, une visite à Votre Altesse; mais je n'ose me promettre ce plaisir, tant il est subordonné à des causes différentes et tant est petite la probabilité que toutes me seront favorables. D'abord, il n'est pas certain que, dans six mois, j'existerai encore ou que je serai assez bien portant pour entreprendre un voyage. Supposé même que ma santé fût très-bonne, des travaux extraordinaires, des raisons de famille, ou des temps affreux peuvent déranger mes projets. Vous même, Monseigneur, vous pourriez être absent à l'époque ou je compterais me mettre en voyage; ou bien, malgré votre jeunesse et les avantages d'une santé robuste, vous pourriez être malade et peu disposé à me recevoir. Il est encore une infinité d'autres causes que j'aurais à énumérer; et, pour ne pas me tromper dans mes calculs, je devrais tenir compte de la probabilité de chacune d'elles. Voyons comment on établit ces calculs.

Quand un événement est *composé*, c'est-à-dire quand son arrivée dépend du concours de plusieurs causes indépendantes les unes des autres, la probabilité s'en calcule d'une manière assez facile. *Il faut prendre individuellement la probabilité simple de chacune des causes qui influencent l'événement attendu, et multiplier toutes ces probabilités*

entre elles; le produit exprimera la probabilité de l'événement composé.

Un exemple nous aidera à éclaircir ce que la théorie pourrait laisser de doutes à cet égard : je me propose de faire tout à l'heure un tour de promenade, et je me demande quelle est la probabilité que les deux premières personnes que je rencontrerai, seront deux hommes, en supposant qu'il y ait dans les rues autant d'hommes que de femmes. La probabilité que je rencontrerai d'abord un homme, est $\frac{1}{2}$; celle que je rencontrerai encore un homme, est également $\frac{1}{2}$; et la probabilité que ces deux événements simples arriveront successivement, de manière à produire l'événement composé que j'attends, est $\frac{1}{4}$, ou le produit des deux premières fractions. Je n'ai en effet qu'une seule chance sur quatre chances également possibles, si l'on considère que les rencontres peuvent se faire ainsi qu'il suit : un homme, puis un homme; un homme, puis une femme; une femme, puis un homme; une femme, puis une femme.

On demande la probabilité de jeter deux fois de suite l'as avec un dé à six faces. L'événement espéré est évidemment composé de ces deux événements simples : jeter une première fois l'as, puis le jeter une seconde fois. Or, le premier événement a pour probabilité $\frac{1}{6}$; le second événement a la même probabilité; et ces deux fractions multipliées entre elles, donnent $\frac{1}{36}$, qui est la probabilité demandée.

Prenons un autre exemple dans les sciences d'observation. Quelle est la probabilité que, si l'on ouvre un registre

de l'état civil, les trois premières naissances inscrites seront toutes trois masculines? L'événement attendu se compose ici de trois événements simples qui ont, chacun, la même probabilité, savoir $\frac{106}{206}$ environ. Nous savons en effet que, quand il naît 100 filles, il naît à peu près 106 garçons. Il faudra donc faire un produit dans lequel la fraction précédente entrera trois fois comme facteur, et l'on aura 0,136. La probabilité demandée est assez faible; elle aurait été moindre encore, si l'on eût calculé dans l'hypothèse de l'arrivée de trois naissances féminines successives. La probabilité simple d'une naissance féminine étant $\frac{100}{206}$, celle de trois naissances féminines successives serait 0,114.

Quand l'événement est composé d'un grand nombre d'événements simples, la probabilité décroît très-rapidement; elle peut même être assez faible pour qu'il devienne difficile de se faire une idée de sa valeur. Je vais en donner un exemple: Supposons qu'il soit question de prendre 200 fois de suite une boule blanche dans une urne contenant des boules blanches et noires en nombre égal; on a d'ailleurs la précaution de remettre chaque fois dans l'urne la boule tirée, pour rester dans les mêmes conditions. Il faudra faire, ici, un produit dans lequel la fraction $\frac{1}{2}$, probabilité du tirage d'une boule blanche, sera deux cents fois facteur. Or, ce produit qui exprime la probabilité de l'événement demandé, est une fraction qui a, pour numérateur, l'unité, et, pour dénominateur, un nombre exprimé par 61 chiffres. En d'autres termes, on n'aura pour soi qu'une seule chance sur un nombre

de chances représenté par 61 chiffres. Il serait très-difficile de se faire une juste idée de ce dernier nombre, et plus difficile encore de l'énoncer. Qu'il nous suffise de dire que si, depuis l'époque de la création, en la faisant remonter à 5841 années, on n'avait cessé de tirer des boules d'une urne, avec une rapidité telle qu'on en eût pris cent millions par seconde, le nombre des tirages ne serait représenté que par *dix-neuf chiffres.*

En supposant une urne de la grandeur de notre globe, pleine de petites boules ayant un rayon d'un millionième de millimètre seulement, c'est-à-dire infiniment moindres que des grains de poussière, le nombre de ces boules ne serait représenté que par *quarante-huit chiffres;* qu'est-ce donc en comparaison de toutes les chances que présentent deux cents boules à tirer!

Certes, en l'absence de la théorie, on ne se serait guère douté qu'il fût moins facile de prendre deux cents fois de suite une boule blanche dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires en nombre égal, que de saisir le seul grain de poussière blanc que pourrait renfermer notre globe, soit à sa surface, soit à son intérieur.

La considération des événements composés est assez fréquente dans ce qui concerne les probabilités de la vie. Ainsi, l'on peut être curieux de connaître la probabilité qu'un homme âgé de 40 ans et sa femme âgée de 30, vivront encore, tous deux, au bout de dix ans. D'après les tables belges, qui sont également applicables à la France, la proba-

bilité de vivre encore dix ans, pour l'homme des villes, à l'âge de 40 ans, est 0,832; et, pour la femme âgée de 30 ans, elle est de 0,862. La probabilité qu'ils vivront encore, tous deux, après dix années, sera le produit des deux fractions précédentes, c'est-à-dire 0,717. Ces nombres ne sont vrais que d'une manière générale; et l'on aurait tort de les appliquer en particulier à tels ou tels individus; c'est ce que j'aurai bientôt l'occasion de faire comprendre.

Si Votre Altesse désirait connaître la probabilité qu'après dix années, la femme survivra à son mari, elle observerait que cet événement se compose des deux suivants: que le mari sera mort et que la femme vivra. Or, ces deux événements simples ont, pour probabilités respectives, 0,168 et 0,862, dont le produit est 0,145 environ.

En général, quatre événements composés sont possibles; je les indique, ici, avec leurs probabilités respectives.

	Probabilité.
Le mari et la femme vivront encore.	0,717.
Le mari vivra et la femme sera morte	0,115.
Le mari sera mort et la femme vivra	0,145.
Le mari et la femme seront morts.	0,023.

Ces quatre probabilités ajoutées ensemble donnent l'unité, symbole de la certitude; ce qui doit être en effet. Il est à remarquer combien est faible la probabilité que les deux époux auront succombé, tous deux, après dix années: cet événement n'a guère que deux centièmes de probabilité en sa faveur.

LETTRE VII.

De l'espérance mathématique. Loterie, sociétés d'assurances.

Il nous est rarement donné de voir naître une science et de surprendre le premier signe qui révèle son existence; c'est ce qui est arrivé cependant pour la théorie des probabilités. C'est auprès d'une table de jeu qu'elle a reçu le jour; et, après avoir passé par de frivoles amusements, elle s'est attaquée presque aussitôt à tous les problèmes les plus importants qui aient occupé les méditations des hommes; elle a entrepris, en même temps, de diriger l'observation et de l'appuyer sur des bases plus solides.

Dans son origine, la théorie des probabilités n'avait pour mission que d'établir des principes d'équité entre les joueurs, de déterminer les enjeux, et de régler les partages dans le cas où l'on quitterait la partie sans l'avoir terminée. Or, l'équité veut que les deux joueurs soient placés dans une position telle qu'aucun d'eux n'ait d'avantages sur l'autre. Ainsi, quand ils ont des chances égales de gagner, ils doivent exposer les mêmes sommes. Mais, *quand les probabilités de*

gagner ne sont pas les mêmes, les joueurs doivent exposer des sommes proportionnelles à ces probabilités.

Dans une loterie, dans la loterie génoise par exemple, où l'on compte 90 numéros, celui qui placerait sur cinq de ces numéros, devrait exposer cinq francs, tandis que l'autre joueur qui a, en sa faveur, les 85 numéros restants, devrait exposer 85 francs : les enjeux seraient dans le rapport de 5 à 85 ou de 1 à 17, c'est-à-dire comme les probabilités respectives de gagner. Cela se conçoit : en effet, supposons 90 chances égales et 90 joueurs; chacun de ces joueurs ayant une de ces chances, sera dans le même cas que ses voisins et exposera autant qu'eux, un franc par exemple; sa probabilité de gagner sera $\frac{1}{90}$. Mais une personne peut se substituer à cinq de ces joueurs, en payant leurs mises; et une autre personne peut également se substituer aux 85 joueurs restants, en payant aussi leurs mises; la première devrait donc payer 5 francs; et, la seconde, 85. Ces sommes sont justement dans le rapport des chances ou des probabilités que les deux joueurs ont de gagner.

Quand le premier joueur gagnera, il recevra donc, pour un franc qu'il a exposé, la somme de 18 francs, c'est-à-dire son enjeu, plus celui de la personne avec laquelle il joue. S'il reçoit moins de 18 francs, le jeu n'est pas équitable, et il se fait à son détriment. C'est ce qui a lieu pour la loterie génoise : le joueur, au lieu de 18 francs auxquels il aurait droit, ne reçoit que 15 francs; les trois autres francs forment le bénéfice de l'entrepreneur des jeux.

Si, au lieu de jouer sur l'*extrait simple*, on jouait sur l'*extrait déterminé*, ou sur la sortie d'un seul numéro à une place marquée dans le tirage, la première, par exemple, on n'aurait pour soi qu'une probabilité égale à $\frac{1}{90}$; et, en exposant un franc, on devrait recevoir 90 francs en cas de gain; au lieu de cette somme, on ne reçoit que 70 francs; donc le bénéfice de l'entrepreneur est de 20 francs.

L'*ambe*, ou la sortie de deux numéros désignés pour un même tirage, ne rend que 270 fois la mise, tandis que l'on devrait recevoir cette mise 400 fois environ; car, avec les 90 numéros de la loterie, on peut faire 4,005 ambes en prenant toutes les combinaisons deux à deux; et avec les cinq numéros que l'on a choisis, on peut former 10 ambes; la probabilité de la sortie d'un ambe est donc $\frac{10}{4005}$.

La perte du joueur, et par conséquent le bénéfice de l'entrepreneur qui exploite la loterie, devient plus considérable encore quand on joue sur le *terne*, le *quaterne* ou le *quine*. L'avantage de l'entrepreneur, qui n'était que $\frac{5}{18}$ pour l'extrait simple, s'élève, pour le quine, jusqu'aux $\frac{42}{43}$ de toute la somme exposée.

On a nommé *espérance mathématique le produit d'une somme qu'on espère, multipliée par la probabilité qu'on a de l'obtenir*. Ainsi, quand on met sur l'extrait simple dans la vue de recevoir une somme de 15 francs, l'espérance mathématique se calcule en multipliant 15 francs par la fraction $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$ qui exprime la probabilité de l'obtenir; on a donc $\frac{15}{18}$ d'un franc ou 83 centimes; telle est la somme qu'il fau-

drait équitablement exposer au lieu de celle de 1 franc. *Il faut, dans toute espèce de jeu ou de pari équitable, que les espérances mathématiques des joueurs soient égales.* Or, Votre Altesse a déjà pu voir combien, dans la loterie génoise, les règles de l'équité sont peu observées à l'égard du joueur, et combien l'entrepreneur fait payer cher le plaisir de jouer. J'ai quelquefois entendu appliquer à la loterie ce que Buffon dit du *pharaon*, « le banquier n'est qu'un fripon avoué, et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas se moquer. »*

Les jeux de hasard se prêtent parfaitement bien aux applications de la théorie des probabilités, et chaque joueur peut se rendre compte de sa position, non-seulement en entrant au jeu, mais encore à chaque instant de la partie, de sorte que, s'il convenait aux joueurs de se séparer, ils sauraient comment ils doivent partager entre eux les sommes exposées, en tenant compte de leurs positions respectives. Ces applications, du reste, sont plus curieuses qu'utiles.

Il n'en est pas de même, quand il s'agit des sociétés d'assurances; ces sociétés diffèrent essentiellement des maisons de jeux, sous le rapport de la moralité. Des deux côtés on expose des sommes, mais dans des vues bien différentes : l'assuré est généralement guidé par des motifs de prudence et d'économie; le joueur au contraire par l'imprévoyance et la dissipation. Un père de famille sans fortune prélèvera, sur les modestes produits de ses travaux, quelques faibles sommes qu'il dépo-

* *Essai d'arithmétique morale*, ch. XII.

sera annuellement, dans la vue d'assurer une pension à sa veuve, s'il vient à succomber avant elle. Pour régler équitablement ce qu'il doit payer, il faut recourir à la considération des probabilités composées.

Ces sortes de calculs n'offrent pas de difficultés; mais ils sont aussi variés que les combinaisons auxquelles se prêtent les sociétés d'assurances, sont nombreuses. Pour n'en prendre qu'un seul exemple, je supposerai qu'un mari âgé de 40 ans veuille laisser à sa femme âgée de 30, une somme de 1000 francs, dans le cas où elle deviendrait veuve avant le terme de dix années. J'ai fait voir à la fin de ma lettre précédente que cet événement composé a, pour probabilité, la fraction 0,145. Il faudra donc multiplier les 1000 francs espérés, par la probabilité de les obtenir, c'est-à-dire par 0,145, ce qui donnera 145 francs; telle est la somme qui doit être payée actuellement par le mari. Cette contribution, assez faible, se trouvera diminuée encore, si l'on observe que l'argent déposé produit des intérêts pendant la période de dix ans. Mais, d'une autre part, il faut considérer que la société d'assurance doit prélever un bénéfice pour ses actionnaires et pour ses frais d'administration. Ce bénéfice, dans certaines sociétés, est quelquefois assez exorbitant pour ressembler à ceux que font les entrepreneurs de loteries; et si les deux institutions laissent supposer des sentiments différents chez ceux qui viennent y exposer leur argent, elles peuvent pécher par les mêmes vices, par un excès immodéré de gain qu'on aurait droit de nommer usuraire.

C'est peut-être ici le lieu de parler d'une difficulté qui a été soulevée dans les pays où l'on a établi des caisses de pensions pour les veuves et les orphelins des fonctionnaires publics. On a fait contribuer généralement à ces caisses non-seulement les hommes mariés, mais encore les célibataires, et l'on a eu parfaitement raison, bien que ces derniers aient souvent considéré comme injuste la contribution qui leur était imposée.

De quoi s'agit-il en effet pour le fonctionnaire public? d'une pension éventuelle à payer à sa veuve. Mais, dira le célibataire, je n'ai pas de femme, je ne suis donc pas dans le cas de laisser une veuve. Le fonctionnaire marié peut dire à son tour, bien que j'aie une femme, il est possible que je lui survive et que la caisse n'ait point de pension à payer, comme il est possible aussi que vous, célibataire, vous preniez une femme qui vous survivra et à qui la pension sera due; chacun de nous doit donc payer pour la probabilité qu'il laissera une veuve. Or, pour le fonctionnaire marié, il faudra consulter la probabilité qu'il a de mourir avant sa femme, probabilité qui règlera ce qu'il doit payer pour laisser une pension éventuelle. Pour le célibataire, le payement d'une pension à sa veuve dépend d'un événement composé; il faut consulter en effet la probabilité qu'il a de se marier et la probabilité qu'étant marié, il mourra avant sa veuve. Ces deux probabilités ne peuvent s'estimer que d'une manière générale et d'après les résultats de plusieurs années d'observations dans l'administration publique; leur produit règle ensuite la somme à

payer annuellement pour que le célibataire, en cas de mariage, participe de plein droit aux avantages de la caisse. Seulement, après son mariage, la contribution annuelle deviendra plus forte, parce que les chances de laisser une veuve sont devenues plus nombreuses.

On pourrait à la vérité dispenser le célibataire de payer une contribution annuelle, sauf à lui faire payer une somme assez considérable au moment où il se marie et où il vient prendre part aux bénéfices d'une caisse déjà établie et pourvue des économies de ses collègues. Mais une pareille somme payée au moment du mariage, serait une lourde charge, dont le poids se fait moins sentir quand il porte également sur toute la carrière du célibataire.

En vain prétendrait-on que tous les célibataires ne se marient pas; on peut objecter avec tout autant de raison, que tous les fonctionnaires mariés ne meurent pas avant leurs femmes; les uns comme les autres font des sacrifices pour obtenir un bénéfice éventuel; sacrifices qui doivent être proportionnés aux espérances mathématiques qu'ils ont.

C'est une chose consolante et morale que les hommes s'unissent et s'entr'aident pour combattre les fléaux dont ils sont incessamment menacés, et qu'au moyen de faibles sacrifices dans les jours de prospérité, ils se ménagent de puissantes ressources dans l'infortune : c'est l'accomplissement d'un des premiers devoirs de la charité chrétienne. On doit savoir gré à la science qui tend à régulariser ce devoir d'après les principes de la justice, et qui étudie les moyens de lui faire pro-

duire les résultats les plus utiles avec le moins de sacrifices possible.

Je me permettrai d'appeler l'attention de Votre Altesse sur un autre avantage que présentent les sociétés d'assurances et les caisses d'épargnes; cet avantage concerne les gouvernements bien plus que les individus. Ceux-ci, en se faisant assurer, présentent à l'état une espèce de garantie qu'ils respecteront l'ordre public. Ils n'iront pas en effet, compromettre l'avenir de leurs familles, en exposant sans raison le produit de leurs économies aux chances de bouleversements politiques. Je me suis souvent étonné que les gouvernements ne prissent point une part plus directe à des institutions qui peuvent développer si avantageusement l'esprit d'ordre et la moralité d'une nation.

LETTRE VIII.

De l'espérance morale. Remarques de Buffon à ce sujet.

L'homme sage et prudent évite les jeux et les paris, lors même qu'il est sûr de voir observer toutes les règles de la plus stricte équité, surtout s'il s'agit d'exposer des sommes un peu considérables. C'est qu'à côté de la question mathématique s'en présente une autre d'un ordre plus élevé. N'aurions-nous pas droit, en effet, de montrer à un ami qui expose la moitié de sa fortune, quelles peuvent être les suites de son imprudence? Ne devrions-nous pas lui faire sentir que les privations qu'il devra s'imposer en cas de perte, ne peuvent nullement être compensées par les avantages qu'il obtient s'il gagne? Il ne suffit pas que les principes mathématiques soient strictement observés, ceux de la morale doivent l'être également. Si un homme me présentait un pistolet chargé, en m'invitant à jeter pile ou croix pour savoir qui de nous deux tirera sur l'autre, certainement je le tiendrais pour fou, et je n'accepterais pas sa proposition, bien qu'il pût prétendre que les probabilités mathématiques d'être tué sont exactement les mêmes pour tous deux.

Lorsqu'il s'agit de sommes exposées, le préjudice en perdant est sans doute moins grand; cependant il peut, dans certains cas, compromettre notre existence, notre honneur. On ne doit, en général, exposer que ce qui peut être perdu, sans aucun inconvénient et sans que la fortune du joueur se trouve lésée : en d'autres termes, il ne faut exposer que des sommes minimes en comparaison de ce que l'on possède. « L'avare est comme le mathématicien, dit Buffon, dans son *Essai d'arithmétique morale;* tous deux estiment l'argent par sa quantité numérique, l'homme sensé n'en considère ni la masse ni le nombre; il n'y voit que les avantages qu'il peut en tirer; il raisonne mieux que l'avare et sent mieux que le mathématicien. L'écu que le pauvre a mis à part pour payer un impôt de nécessité, et l'écu qui complète les sacs d'un financier n'ont pour l'avare et le mathématicien que la même valeur; celui-ci les comptera par unités égales, l'autre se les appropriera avec un plaisir égal, au lieu que l'homme sensé comptera l'écu du pauvre pour un louis, et l'écu du financier pour un liard. » C'est dans ce sens, en effet, qu'il convient d'estimer l'importance d'une somme en la comparant à ce qu'on possède; et *cette importance, qu'on nomme la valeur morale, s'évalue en divisant la somme par le bien que possède la personne qui l'expose.* Ainsi, 1000 francs pour celui qui n'en possède que 2000, ont la même importance morale que 500,000 francs pour celui qui possède un million.

En adoptant cette manière de calculer, on reconnaîtra sans peine que le jeu réglé de la manière la plus équitable,

ne peut être que défavorable à l'un et à l'autre joueur. Pour rendre la chose plus sensible, je supposerai qu'une personne qui ne possède que 2000 francs, en expose 1000 au jeu de pile ou croix. La valeur morale de cette somme sera $\frac{1}{2}$, tandis que la valeur morale des 1000 francs qu'elle obtient, en cas de gain, sera représentée par $\frac{1}{3}$ seulement. Ainsi, par rapport aux 2000 francs que cette personne possède, l'importance de la somme exposée se trouve représentée par 1000 francs, et celle de la somme gagnée, par 666,67; il y a donc une différence de 333,33 francs entre l'enjeu et le bénéfice. C'est là le détriment moral auquel s'est exposé le joueur.

Ce détriment peut, à la vérité, devenir très-minime, quand l'argent exposé ne forme qu'une faible partie de la fortune du joueur : aussi la différence entre les valeurs morales de la somme mise au jeu et de la somme espérée doit être considérée alors comme étant sensiblement nulle.

On peut être arrêté par une difficulté, quand il s'agit d'apprécier l'importance d'une somme pour un individu qui actuellement ne possède rien. Mais il est à remarquer que, pour celui qui vit du travail de ses mains, ce travail même représente un capital qui forme sa fortune. Celui qui mendie pour soutenir son existence, trouve dans son état des ressources qu'il n'échangerait pas contre telle somme qu'on lui compterait annuellement, sous forme de revenu fixe. Il n'y a guère que le malheureux mourant de faim qui puisse être considéré comme ne possédant absolument rien.

Les mêmes considérations devraient nous porter à ne

jamais exposer notre fortune entière aux chances d'un seul événement. Si j'avais à transporter en Amérique une somme considérable, je ne voudrais pas la placer sur un seul vaisseau; en cas de naufrage, je serais ruiné. Si je divise la somme sur plusieurs vaisseaux ayant tous la même chance d'être détruits, je cours le risque de faire des pertes partielles, mais je crains peu de voir se réaliser l'événement composé d'où dépendrait la perte totale de mon avoir.

La prudence doit défendre également de placer toute sa fortune entre les mains d'une seule personne, quelles que soient les garanties qu'elle présente.

Je suis persuadé que Votre Altesse, pour des motifs semblables, verrait avec regret qu'on ne s'occupât, dans ses états, que d'un genre de culture exclusivement. Si cette culture venait à manquer, le désastre serait très-sensible; tandis qu'en variant les genres de culture, les chances de voir manquer à la fois toutes les récoltes d'une année sont extrêmement faibles; le mal n'est senti que partiellement. Depuis que la nourriture du pauvre est plus variée et comprend plus d'objets d'une récolte à peu près certaine, les disettes qui affligeaient si souvent nos aïeux, sont devenues à peu près impossibles. C'est un bienfait en même temps qu'une conséquence des progrès de la civilisation.

Buffon, dont les écrits ont contribué à répandre beaucoup de jour sur la question qui nous occupe, présente l'exemple suivant pour mieux faire apprécier combien, dans les jeux même les plus équitables sous le rapport ma-

thématique, la position des deux joueurs est également défavorable. « Si deux hommes s'avisaient de jouer tout leur bien, quel serait l'effet de cette convention? L'un ne ferait que doubler sa fortune, et l'autre réduirait la sienne à zéro or, quelle proportion y a-t-il entre la perte et le gain? La même qu'entre tout et rien; le gain de l'un n'est qu'égal à une somme assez modique, et la perte de l'autre est numériquement infinie, et moralement si grande, que le travail de toute sa vie ne suffirait peut-être pas pour regagner son bien.

» La perte est donc infiniment plus grande que le gain lorsqu'on joue tout son bien; elle est plus grande d'une sixième partie lorsqu'on joue la moitié de son bien; elle est plus grande d'une vingtième partie lorsque l'on joue le quart de son bien; en un mot, quelque petite portion de sa fortune qu'on hasarde au jeu, il y a toujours plus de perte que de gain; aussi, le pacte du jeu est un contrat vicieux et qui tend à la ruine des deux contractants. Vérité nouvelle, mais très-utile, et que je désire qui soit connue de tous ceux qui, par cupidité ou par oisiveté, passent leur vie à tenter le hasard.

» On a souvent demandé pourquoi l'on est plus sensible à la perte qu'au gain; on ne pouvait faire à cette question une réponse pleinement satisfaisante, tant qu'on ne s'est pas douté de la vérité que je viens de présenter; maintenant la réponse est aisée : on est plus sensible à la perte qu'au gain, parce qu'en effet, en les supposant numériquement égaux, la perte est néanmoins toujours et nécessai-

rement plus grande que le gain; le sentiment n'est en général qu'un raisonnement implicite, moins clair, mais souvent plus fin, et toujours plus sûr que le produit direct de la raison. On sentait bien que le gain ne nous faisait pas autant de plaisir que la perte nous causait de peine; ce sentiment n'est que le résultat implicite du raisonnement que je viens de présenter. »

Ces considérations seraient bien propres à modérer la cupidité des joueurs, s'ils consultaient le moins du monde la raison, avant de tenter la fortune.

Il est des parties plus désastreuses que l'on entreprend quelquefois avec la plus coupable témérité; ce sont celles que l'on joue sur des champs de bataille. Tristes conditions que celles qui exigent, pour enjeu, la prospérité des nations et le sang des hommes; où le gagnant est celui qui réussit le mieux à détériorer la part qu'il convoite, sans qu'il puisse prévoir l'étendue des sacrifices qu'il devra s'imposer, pour l'obtenir!

LETTRE IX.

Comment il faut envisager le calcul des probabilités. De l'accord entre la théorie et l'expérience.

J'aurai l'honneur d'entretenir aujourd'hui Votre Altesse d'une question importante, celle de savoir le degré de confiance qu'on peut attacher à un résultat donné par la théorie des probabilités. On se tromperait étrangement, si l'on croyait que l'expérience vient toujours justifier les prévisions du calcul. Cet accord n'est en général qu'accidentel, mais on peut faire que la discordance devienne aussi faible qu'on le désire, eu égard à la nature des recherches dont on s'occupe. En attendant que nous examinions ce point important avec tout le soin et les détails qu'il mérite, il ne sera pas hors de propos de nous mettre en garde dès à présent contre les abus que nous pourrions être tentés de faire de la théorie.

Quand on ne fait qu'une seule épreuve, il ne saurait jamais y avoir accord entre le résultat du calcul et celui de l'expérience. Avant l'événement, il n'y a que des probabilités pour ou contre son arrivée; et, quand l'événement s'est produit, les probabilités sont remplacées par la certitude. Ainsi, avant de prendre une carte dans un jeu ordinaire,

j'ai $\frac{12}{32}$ pour probabilité de prendre une figure; et j'ai contre moi la probabilité $\frac{20}{32}$; cependant, quand la carte est tournée, ma position se trouve entièrement changée; mes doutes ont fait place à la certitude; et, si j'ai parié pour l'événement, je sais que j'ai gagné ou perdu, quelle que soit la probabilité que j'avais en ma faveur.

Quand on fait un grand nombre d'épreuves, l'accord peut s'établir entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience; mais cet accord n'est pas nécessaire. Jacques Bernoulli a fait voir qu'*en multipliant convenablement le nombre des épreuves, on peut atteindre à une probabilité aussi voisine de la certitude qu'on voudra, que la différence entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience sera resserrée dans des limites aussi étroites qu'on voudra.*

C'est ce que savent fort bien ceux qui établissent des loteries ou des maisons de jeux de hasard. Le grand nombre de joueurs qui viennent y exposer leur argent, laissent pour les entrepreneurs, malgré les fluctuations apparentes du sort, un bénéfice qu'on peut estimer d'avance, et qui est tout aussi fixe que les revenus du trésor. Ainsi, les *Recherches statistiques sur Paris* nous apprennent que, de 1816 à 1820 inclusivement, la loterie de Paris a mis annuellement en circulation une somme d'environ 25 millions de francs, sur lesquels le trésor recevait un peu plus du quart.

Le gouvernement belge, en instituant des caisses de pensions pour les veuves et les orphelins des fonctionnaires publics, a malheureusement perdu de vue ce principe impor-

tant, que les prévisions du calcul ne peuvent marcher d'accord avec l'expérience qu'autant qu'on opère sur de grands nombres. En formant des caisses séparées pour chaque branche du service public, et en s'imposant la condition de ne jamais leur venir en aide, il a multiplié les chances des fluctuations auxquelles les caisses sont nécessairement assujetties. Il devient très-peu probable que les espérances d'un père pourront se réaliser, au sujet de la pension de sa veuve ou de ses orphelins, quand une association ne compte pas même une centaine de membres, comme il arrive pour le haut enseignement. La suite naturelle d'un pareil état de choses, c'est que certaines caisses devront prospérer pendant que d'autres seront en souffrance; cette inégalité sera nécessairement un grand mal, puisqu'elle atteindra des hommes que l'on devait considérer comme les membres d'une même famille.

C'est un principe très-simple et très-utile dans la pratique, que la *précision des résultats croît comme la racine carrée du nombre des observations.* Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, les degrés de précision sont comme les nombres 1, 2, 3, 4, etc., quand les observations sont comme les nombres 1, 4, 9, 16, etc.

J'ai été curieux de soumettre ce principe à l'expérience. J'ai fait jeter, dans une urne, vingt boules blanches et un égal nombre de boules noires, de sorte que la probabilité était la même, et égale à $\frac{1}{2}$, pour prendre soit une boule blanche, soit une boule noire. Il semblait donc qu'après un certain nombre de tirages, le nombre des boules blan-

ches sorties dût être égal au nombre des boules noires; ce n'est cependant pas ce qui est arrivé, comme Votre Altesse pourra le voir dans le petit tableau suivant, qui indique les résultats successivement obtenus après 4, 16, 64, etc., tirages. Je dois prévenir qu'après chaque tirage, la boule tirée était remise dans l'urne, pour que toutes les circonstances de l'expérience restassent les mêmes.

NOMBRE des boules tirées.	DEGRÉ de précision.	NOMBRE DES BOULES		RAPPORT des nombres précédents.
		blanches.	noires.	
4	2	1	3	0.33
16	4	8	8	1.00
64	8	28	36	0.78
256	16	125	131	0.95
1024	32	528	496	1.06
4096	64	2066	2030	1.02

La première colonne indique les nombres des boules tirées, et, la seconde, les racines carrées de ces mêmes nombres. D'après le principe énoncé plus haut, ces racines expriment les degrés relatifs de la précision des résultats.

Dans les deux colonnes suivantes, se trouve l'indication des boules blanches et des boules noires qui sont sorties de l'urne; ces nombres devraient être égaux entre eux, si la théorie et l'expérience marchaient rigoureusement d'accord. Or, la dernière colonne nous fait connaître le rapport des boules blanches aux boules noires tirées : ce rapport devrait être 1.

Mais un pareil résultat n'a été obtenu qu'une fois et seulement après 16 tirages. Cet accord n'était qu'accidentel, tandis que nous remarquons, au milieu des oscillations des nombres, qu'il y a bien évidemment une tendance à se rapprocher de l'unité par la multiplication des tirages.

Si Votre Altesse s'étonnait de me voir insister sur un exemple aussi vulgaire, je pourrais, pour me justifier, m'appuyer d'une autorité imposante, de celle de l'illustre Buffon qui, dans son *Essai d'arithmétique morale*, cite des épreuves semblables qu'il a fait faire par un enfant.

DEUXIÈME PARTIE.

DES MOYENNES ET DES LIMITES.

LETTRE X.

Des moyennes et des limites en général.

Quand on se met en présence de la nature, et qu'on cherche à l'interroger, ce qui frappe au premier abord c'est la variété infinie qu'on observe dans les moindres phénomènes. Quelles que soient les limites dans lesquelles on concentre son attention, on retrouve une diversité qui étonne autant qu'elle embarrasse. Les plus simples appréciations laissent un vague, incompatible avec la précision qu'exigent les sciences. Un même objet, mesuré ou pesé plusieurs fois de suite, présente, malgré toutes les précautions que l'on peut prendre, des résultats presque toujours dissemblables.

Nos idées cependant ont besoin de se fixer et de s'arrêter sur un nombre précis, sur une moyenne qui donne le résultat des observations aussi dégagé que possible de tout ce qu'il a d'accidentel.

La considération des moyennes nous est si familière, que nous l'employons, en quelque sorte à notre insu, partout où nous rencontrons des objets qui fixent notre attention et qui sont sujets à varier. Ainsi, nous ne faisons pas difficulté d'attribuer au soleil une grandeur apparente déterminée, bien que cet astre ne soit pas vu rigoureusement sous le même angle, pendant deux jours, et l'on peut dire pendant deux instants consécutifs. C'est ainsi que nous disons encore quelle est la température des étés dans un lieu donné, bien que cette température varie à chaque instant.

La théorie des moyennes sert de base à toutes les sciences d'observation; elle est si simple et si naturelle, qu'on n'apprécie peut-être pas assez le pas immense qu'elle a fait faire à l'esprit humain. Nous ignorons à qui elle est due; c'est ainsi que toutes les grandes découvertes se sont établies, sans qu'on en ait connu les inventeurs. Tout ce que nous apprend à cet égard l'histoire des sciences, c'est qu'un peuple se servait de la découverte avant les autres. Il en est ainsi de la numération, de l'écriture et de l'imprimerie même.

Remarquons dès à présent qu'en se préoccupant de l'idée de la moyenne pour des quantités susceptibles de varier, on a peut-être trop perdu de vue les *limites* entre lesquelles s'opèrent les variations. Partout où l'on peut dire *plus* ou

moins, on a nécessairement trois choses à considérer, un état moyen et deux limites.

Sans recourir à la science, l'habitude nous donne une appréciation vague de la moyenne et des limites des variations qui appartiennent à chaque élément variable que nous présente la nature ou l'état social; c'est, d'après cette appréciation, que nous sommes guidés dans nos raisonnements. Mais il convient aux progrès des lumières de substituer des idées précises à des notions vagues.

Il serait assez curieux de rechercher à quelle époque on a commencé à faire un usage raisonné des moyennes; il en existait assurément une idée obscure dans l'antiquité, car, cette idée, comme je l'ai fait observer déjà, est inhérente à notre nature et sert de base à presque tous nos jugements; mais elle ne s'est produite explicitement que très-tard, et il serait difficile de fixer, chez les modernes, l'époque de son introduction; celle où l'on a établi en principe que *la moyenne d'une série d'observations s'obtient en divisant la somme des valeurs observées par le nombre des observations*. La considération des limites, en tant qu'elles complètent l'idée de la moyenne, n'a pu prendre quelque consistance que par l'application du calcul des probabilités à l'étude des phénomènes naturels. L'établissement et le développement de la théorie des moyennes formeraient un des chapitres les plus intéressants de l'histoire de l'esprit humain; c'est Archimède, ce génie remarquable à tant d'égards, qui semble avoir, dans l'antiquité, le mieux apprécié l'im-

portance des moyennes; il en a fait un usage admirable dans la recherche du *centre de gravité*, dont il est l'inventeur. Il a substitué la considération d'un point unique à celle d'un grand nombre de points matériels; et cette idée ingénieuse qui a été si fécondée depuis, lui mériterait, à elle seule, la reconnaissance des hommes.

Quand Méton, quatre à cinq siècles avant l'ère chrétienne, vint présenter aux grecs réunis pour célébrer les jeux olympiques, sa fameuse période qui fut accueillie avec tant d'enthousiasme et gravée en *lettres d'or*, il n'avait pu reconnaître la durée d'une lunaison et celle de l'année tropique que par un calcul analogue à celui de nos moyennes. Il en est de l'esprit comme du corps qui marchait d'un pas sûr, bien avant que l'on connût les lois de l'équilibre.

Aristote, l'un des plus grands observateurs de l'antiquité, avait également aperçu les propriétés des moyennes; il en faisait l'application aux sciences morales : selon lui, les vertus consistent dans un juste état d'équilibre; et toutes nos qualités, dans leurs plus grands écarts de la moyenne, ne produisent que des vices. Cette doctrine avait passé de l'école des philosophes chez les poëtes : Horace, parmi les Romains, en a été l'un des plus élégants et des plus aimables interprètes.

Mais combien il y a loin de ces premiers aperçus aux savantes théories que nous possédons aujourd'hui; et cependant, il nous reste bien du chemin à faire encore, pour que les brillants travaux de l'analyse moderne produisent

tous leurs fruits. La plupart des observateurs, les meilleurs même, ne connaissent que très-vaguement, je ne dirai pas la théorie analytique des probabilités, mais la partie de cette théorie qui concerne l'appréciation des moyennes. J'ose croire, cependant, que si Votre Altesse veut bien continuer à me prêter son attention, elle n'aura pas lieu de regretter le temps qu'elle y aura employé.

LETTRE XI.

Des moyennes proprement dites et des moyennes arithmétiques.

Le retour du printemps doit charmer doublement Votre Altesse dans les lieux qu'elle habite. La vue d'un grand fleuve est un spectacle aussi imposant que varié; celle du Rhin surtout plaît à l'imagination, qui y trouve en quelque sorte la personnification de la vieille Allemagne, dans ses jours de gloire comme dans ses jours d'infortune. Les sommets vaporeux des sept montagnes qui se dessinent sur l'horizon, ferment majestueusement cet imposant tableau et rappellent les féeries du moyen âge.

Je voudrais habiter Bonn, au retour du printemps; j'irais passer mes journées sur les bords du Rhin. Je renoncerais à toute étude, l'esprit uniquement occupé du spectacle animé que présente ce beau fleuve. Je vois d'ici les bateaux qui se croisent en tous sens, et les voyageurs de toutes les nations qui vont rendre hommage à l'une des plus belles et des plus riches vallées qui soient au monde. Ces ondes qui fuient si rapidement devant moi, d'où viennent-elles? Il y a peu de jours, elles descendaient peut-être du sommet des Alpes, et

maintenant elles vont se perdre au sein des mers. Si j'en juge par leur vitesse et par la largeur du fleuve, la quantité d'eau qui passe doit être immense; il semblerait que des pluies diluviennes puissent seules alimenter un aussi vaste bassin.

Mais, pendant que je parle de fuir l'étude et de chercher la tranquillité, je me trouve ramené, malgré moi, à mes anciennes habitudes. Je calcule déjà la vitesse des eaux; je me demande si cette vitesse est toujours la même; et, en la supposant variable, quelle peut être sa vitesse moyenne?... Si je porte plus loin ma pensée, et si je considère la totalité des eaux recueillies dans le bassin que parcourt le Rhin, si je cherche à savoir combien il a dû tomber d'eau par mille carré de surface pour alimenter ce fleuve, je me trouve encore en face de moyennes. Partout, je suis forcé de recourir à leur emploi; il importe donc d'acquérir des idées un peu justes sur leur théorie.

En prenant une moyenne, on peut avoir en vue deux choses bien différentes : on peut chercher à déterminer un nombre qui existe véritablement; ou bien à calculer un nombre qui donne l'idée le plus rapprochée possible de plusieurs quantités différentes, exprimant des choses homogènes, mais variables de grandeur. Je vais expliquer ma pensée.

En mesurant la hauteur d'un édifice vingt fois de suite, je ne trouverai peut-être pas deux fois identiquement la même valeur : cependant, Votre Altesse conçoit que l'édifice a une hauteur déterminée, et si je ne l'ai pas estimée exactement

par chacune des opérations que j'ai faites pour la reconnaître, c'est que ces opérations comportent quelque incertitude. Je me borne alors à prendre la moyenne de toutes mes déterminations pour la véritable hauteur cherchée. Les limites plus ou moins larges dans lesquelles se trouvent renfermées les mesures que j'ai obtenues, dépendent de mon plus ou moins d'adresse et de l'exactitude des instruments dont j'ai fait usage.

Je puis encore employer le calcul de la moyenne dans un autre sens. Je voudrais donner une idée de la hauteur des maisons qui se trouvent dans une rue déterminée. Il faudra mesurer la hauteur de chacune d'elles, faire la somme des hauteurs observées, et diviser le résultat par le nombre des maisons. La valeur moyenne ne représentera la grandeur d'aucune d'elles en particulier, mais elle aidera à faire connaître leur hauteur en général; et les limites plus ou moins larges dans lesquelles se trouveront renfermées toutes les mesures obtenues, dépendront de la diversité des maisons.

Il existe entre ces deux exemples une différence très-notable qu'on n'aura peut-être pas saisie au premier abord, mais qui n'en est pas moins d'une grande importance. Dans le premier, la moyenne représentait une chose existant réellement; dans le second, elle donnait, sous la forme d'un nombre abstrait, une idée générale de plusieurs choses essentiellement différentes, quoique homogènes.

D'une autre part, et ce point est capital, les nombres qui

ont concouru à former la moyenne dans l'un et l'autre exemple, se présentent de manières bien différentes. Dans le second exemple, ils ne se trouvent liés entre eux par aucune loi de continuité; tandis que, dans le premier, comme nous aurons occasion de le voir bientôt, les déterminations des hauteurs, bien que fautives, se groupent des deux côtés de la moyenne avec une régularité telle qu'on pourrait assigner d'avance leurs valeurs, si l'on donnait les limites entre lesquelles elles se trouvent comprises.

Cette distinction est si importante, que j'ose prier Votre Altesse de ne pas la perdre de vue. J'emploierai même des mots différents pour mieux l'établir : je réserverai le nom de *moyenne* pour le premier cas, et j'adopterai celui de *moyenne arithmétique* pour le second, afin de faire sentir qu'il s'agit ici d'une simple opération de calcul entre des quantités qui n'ont pas de relations essentielles. Ces relations ne s'aperçoivent pas toujours; et parfois on les reconnaît quand on ne s'attendait pas à en trouver : la moyenne arithmétique devient alors une véritable moyenne.

Quelquefois la moyenne arithmétique se calcule d'après les éléments les plus divers, sans qu'on puisse en conclure que l'idée générale qu'elle doit représenter soit sans utilité ou sans importance. Je citerai pour exemple la *vie moyenne*. On sait que le statisticien, quand il veut la calculer pour un pays donné, suppose que tous les individus nés en même temps dans ce pays mettent en commun les années, mois et jours qu'ils ont à vivre, et en font un partage égal entre eux,

de manière que l'un ne vive pas plus longtemps que l'autre. Ainsi, sur 100,000 individus, 9,600 ne vivent qu'un mois, 2,400 vivent deux mois, 1,760 vivent trois mois, et ainsi de suite *. On fait la somme générale des durées de la vie de chacun de ces individus, et l'on divise par 100,000. Le résultat de l'opération donne la vie moyenne : elle est d'environ 32 ans pour la Belgique, comme pour la France; elle s'élève, dit-on, à 33 ans pour l'Angleterre.

On a remarqué que, par suite des progrès de la civilisation et des sciences, la vie moyenne est devenue successivement plus longue chez quelques peuples, et l'on s'en est félicité, surtout par l'idée que l'allongement de la vie s'est également reporté sur tous les individus : c'est en effet ce qui se produit le plus généralement.

Il convient cependant de remarquer que la considération de la vie moyenne peut bien souvent induire en erreur; et ce qui vient d'être dit en servira de preuve. Par exemple, de ce que la vie moyenne, en France et en Belgique, serait exactement de même longueur, il ne faudrait pas se hâter de conclure que ces deux pays sont dans les mêmes circonstances sous le rapport de la mortalité. Qu'on enlève à un homme dans la force de l'âge, à un père de famille, dix années de sa vie, pour les ajouter à la vie d'un de ses enfants mort immédiatement après sa naissance, cela ne changera en rien la durée de la vie moyenne; mais cette transposition

* Voyez les tables de mortalité de Belgique dans les *Annuaires de l'observatoire de Bruxelles*.

de dix années aura une influence immense sur le sort de la famille qui, ayant perdu son soutien et son appui, comptera une personne de plus à nourrir.

Le chiffre de la vie moyenne ne donne qu'un aperçu général de la mortalité, et ne peut être employé qu'avec circonspection. Il serait difficile de citer un exemple des moyennes arithmétiques où l'on emploie des éléments plus dissemblables. Dans le calcul de la vie moyenne, on attribue, en effet, la même valeur à une année d'existence, soit pour l'enfant, soit pour l'homme mûr, soit pour le vieillard.

LETTRE XII.

Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans les sciences politiques.

Les sciences d'observation, les sciences politiques surtout, font un fréquent emploi des moyennes. Le statisticien aura besoin de connaître les prix de la main-d'œuvre et des principaux objets de consommation, mais ces prix peuvent varier d'un jour à l'autre, et quelquefois dans les localités les plus rapprochées. Il importe donc de savoir quel est le prix moyen, et quels sont les prix extrêmes. S'agit-il de la valeur du froment, on ne s'arrêtera pas à considérer telle localité, ou telle saison de l'année, ou même telle année en particulier, on demandera une moyenne arithmétique générale qui permette d'embrasser un certain nombre d'années, et l'on recherchera en même temps les limites entre lesquelles cette moyenne se trouve comprise. Ainsi, en remontant vers l'origine du royaume des Pays-Bas, on trouve, pour les deux premières périodes décennales et pour la période sexennale qui a suivi * :

* Voyez l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles*, pour 1844, p. 221.

PÉRIODE.	MOYENNES des prix.	PRIX MAXIMUM.	PRIX MINIMUM.
1817 à 1826	fr. 17,76	35,58 en 1817	11,09 en 1824
1827 à 1836	» 18,16	23,58 en 1829	13,19 en 1834
1837 à 1842	» 20,40	22,76 en 1839	16,31 en 1837

Un simple coup d'œil jeté sur ce tableau, nous dévoile plusieurs faits importants:

1° Le prix moyen du froment a progressivement augmenté depuis 1817 jusqu'en 1842.

2° Les limites entre lesquelles le prix a varié se sont successivement resserrées: pour la première période décennale, les prix *maximum* et *minimum* diffèrent de fr. 24,29; pour la seconde période, de fr. 10,39; et seulement de fr. 6,45, pour la troisième période, qui ne comprend à la vérité que six années.

Or, les deux faits que je signale sont une conséquence naturelle de notre état social. L'argent perd progressivement de sa valeur, quand on la rapporte à des choses utiles et indispensables, telles que le froment. Ce fait est bien connu des économistes qui en ont signalé les causes; il est si manifeste que quelques années d'observation suffisent pour le mettre en évidence.

Quant au second fait, il n'est pas moins curieux ni moins important, bien qu'il ait été peu remarqué. C'est une conséquence générale des progrès de la civilisation, que tous les éléments sociaux, sujets à varier, oscillent dans des limites

d'autant plus étroites que les lumières se répandent davantage; et par lumières, je n'entends pas seulement l'état de nos connaissances, mais la sagesse de nos institutions, mais le calme politique et tout ce qui peut préserver les citoyens des fléaux qui menacent leur personne et leurs biens. J'ai essayé de montrer ailleurs tous les avantages qui résultent du resserrement des limites entre lesquelles peuvent varier les différents éléments sociaux *. Pour n'en prendre qu'un exemple, le tableau qui précède nous montre que l'écart le plus grand qu'ait subi le prix du froment, a été observé en 1817; ce prix s'est élevé jusqu'au delà de 35 francs, c'est-à-dire, au double du prix moyen; aussi, cette année calamiteuse a laissé des traces profondes et déplorables dans les tables mortuaires et dans tous les éléments qui se rattachent au bien-être des hommes.

Un grand abaissement dans le prix des grains ne produirait pas des conséquences moins fâcheuses; seulement le mal serait déplacé et atteindrait les producteurs au lieu de frapper les consommateurs. Si l'on introduisait en Belgique assez de grains de l'extérieur, pour réduire subitement de moitié les prix ordinaires, ce serait une véritable calamité pour les agriculteurs, et l'on ne tarderait pas à s'en apercevoir, surtout dans les listes mortuaires.

Si ce fait a été moins observé que l'autre, c'est que les écarts dans les prix des grains ne varient pas également

* *Physique sociale*, 2 vol. Paris, chez Bachelier, 1835.

autour de la moyenne : les écarts en plus sont généralement plus grands que les écarts en moins.

L'homme d'état, habitué à traiter les questions générales d'utilité publique, se trouve forcé de recourir à l'emploi des moyennes plus fréquemment que les autres hommes. Cette habitude lui suggère, pour arriver promptement à son but, des expédients plus ou moins ingénieux, plus ou moins faciles dans la pratique. En l'absence de documents exacts, recueillis par la science, il doit se borner bien souvent à prendre des données voisines de la vérité.

On ne peut guère élaborer une loi qui concerne les intérêts de l'industrie et de l'agriculture, sans qu'il s'y rattache des questions de statistique; et cependant les pays, même les plus civilisés, connaissent à peine leurs ressources et leurs besoins.

LETTRE XIII.

Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans la météorologie.

Les moyennes jouent également un grand rôle dans les sciences physiques, et dans la météorologie en particulier. Ainsi, pour se faire une idée de la température d'une journée, on prendra la moyenne arithmétique entre les deux températures extrêmes de cette journée. Si l'on a reconnu que pendant la nuit, le thermomètre est descendu jusqu'à six degrés centigrades, et qu'il s'est relevé ensuite jusqu'à seize degrés vers le milieu du jour, on dit que la température a été de onze degrés.

Cette valeur moyenne de onze degrés peut donner une idée de la température, quoique insuffisante sous bien des rapports, car elle a pu être produite de différentes manières. La température a pu être uniformément de onze degrés pendant les vingt-quatre heures; ou bien elle a oscillé entre les limites de six et seize degrés, peut-être même entre des limites plus larges encore.

La considération de ces limites n'est pas sans importance, puisqu'elle nous donne la mesure des variations qui sont survenues dans la température, et que ces variations,

quand elles sont un peu étendues, peuvent être très-nuisibles à la santé. Il est utile de les consulter, quand on veut se faire une idée de la salubrité d'un climat; on a remarqué en général qu'elles sont moins sensibles sur les côtes des mers que dans l'intérieur des continents. Elles ne sont pas non plus les mêmes dans un lieu donné, pendant les différentes saisons. La discussion sommaire d'un pareil sujet sera bien propre à donner des idées un peu justes sur la question qui nous occupe; car la manière de procéder dans ce genre de recherches, est applicable dans une infinité de circonstances.

Supposons qu'il s'agisse d'étudier la température de Bruxelles. Nous nous rappellerons d'abord que la température moyenne d'un jour est la moyenne arithmétique des températures qu'on aurait obtenues en observant à tous les instants de la journée. Or, les savants, les plus persévérants même, renonceraient sans doute à en faire usage, s'il n'était possible de la déterminer qu'à ce prix. Heureusement on a reconnu qu'on peut suppléer assez bien, par différents procédés, à celui que je viens d'indiquer, et qui exigerait la présence de l'observateur auprès de ses instruments, pendant vingt-quatre heures consécutives, sans lui laisser un instant de relâche. Un de ces procédés consiste à prendre la moyenne arithmétique des deux températures extrêmes de la journée; et le nombre que l'on obtient ainsi s'écarte peu de celui qu'on aurait obtenu par des observations continues. Il y a plus, il n'est pas même nécessaire de se tenir auprès de son thermo-

mètre pour guetter la valeur et l'instant du *maximum* ou du *minimum*. On possède des instruments qui enregistrent par eux-mêmes les deux températures extrêmes, et l'observateur n'a d'autre soin à prendre que celui d'en inscrire les données et de mettre l'instrument en état d'en fournir de nouvelles pour le lendemain. C'est donc par ce moyen si simple qu'on se procure, au moins très-approximativement, trois choses importantes : la température moyenne et les deux températures limites de la journée.

Arrêtons-nous d'abord à la première de ces données. En la prenant pendant plusieurs jours consécutifs, on s'aperçoit bientôt que la température moyenne est très-variable. En 1842, par exemple, au mois de juillet, la température moyenne diurne, à Bruxelles, a eu des valeurs diverses entre les limites extrêmes de 25°,05 centigrades et 13°,85. La moyenne arithmétique des 31 températures différentes obtenues pendant les 31 jours de juillet, a donné 17°,13; cette quantité représente la *température moyenne du mois*. Si la curiosité porte Votre Altesse à rechercher, dans les publications de l'observatoire de Bruxelles, ce qui est arrivé pendant les années précédentes, voici ce qu'elle trouvera pour la période décennale de 1833 à 1842. A côté de la température moyenne du jour, j'ai donné, pour chaque année, la température du jour le plus chaud, et celle du jour le plus froid de chaque mois.

TEMPÉRATURE DE JUILLET, A BRUXELLES.			
ANNÉES.	TEMPÉRATURE moyenne.	JOUR le plus chaud.	JOUR le plus froid.
1833. . .	18°,5	21°,2	15°,4
1834. . .	21,1	25,6	14,4
1835. . .	19,1	23,3	13,3
1836. . .	17,6	22,1	14,5
1837. . .	17,2	22,3	12,2
1838. . .	18,1	26,2	12,1
1839. . .	18,1	22,9	11,4
1840. . .	16,3	19,3	12,8
1841. . .	15,2	19,9	13,3
1842. . .	17,1	23,0	13,8
MOYENNE.	17,83	22,58	13,42

La température moyenne d'une journée de juillet est donc de 17°,83, en consultant les moyennes des différents jours de juillet pendant la période décennale de 1833 à 1842, c'est-à-dire 310 moyennes, dont la plus forte a été de 26°,2, pour l'année 1838, et la plus faible, de 11°,4 pour 1839. C'est entre ces deux températures extrêmes que la température du jour s'est trouvée constamment resserrée; mais il est extrêmement peu probable que ces deux limites se reproduiraient simultanément pendant une même année. Les limites les plus probables sont celles qu'on déduit de l'ensemble des valeurs particulières de chaque année, c'est-à-dire 22°,58 et 13°,42.

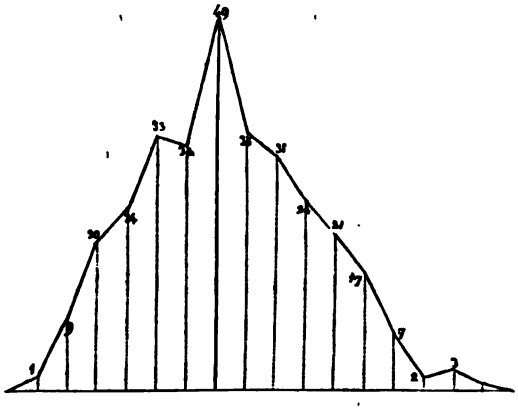
En regardant 17°,83 comme la moyenne arithmétique des 310 températures diurnes observées pendant 10 années et

pendant les mois de juillet, je n'ai supposé aucune relation nécessaire entre ces 310 nombres. Cependant il pourrait se faire qu'il en existât une à mon insu, et que toutes ces valeurs ne se fussent pas présentées sans un certain ordre. C'est ce qu'il peut être intéressant de rechercher. Le moyen le plus simple pour constater une telle relation, si elle a lieu, consiste à ranger, sans aucune préoccupation, toutes les températures observées d'après leur ordre de grandeur, en les classant, par exemple, de degré en degré. C'est ce qui se trouve fait dans le tableau suivant :

GRANDEUR de la température.	NOMBRE DE JOURS PAR ANNÉE.										Les 10 ANNÉES.
	1833	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	
11 à 12°	»	»	»	»	»	»	1	»	»	»	1
12 à 13	»	»	»	1	1	5	1	1	»	»	9
13 à 14	»	»	1	1	»	»	3	2	12	»	20
14 à 15	»	1	»	3	2	1	»	4	7	6	24
15 à 16	2	»	1	3	2	5	1	6	5	8	33
16 à 17	3	1	4	3	8	2	2	6	1	2	32
17 à 18	7	»	3	5	10	4	6	6	2	6	49
18 à 19	7	3	4	3	5	3	3	4	1	2	35
19 à 20	7	5	4	4	»	1	5	2	2	1	31
20 à 21	3	3	8	2	2	2	3	»	»	1	24
21 à 22	2	7	4	1	»	3	3	»	»	1	21
22 à 23	»	4	1	4	1	3	3	»	»	1	17
23 à 24	»	3	1	1	»	»	»	»	»	2	7
24 à 25	»	1	»	»	»	1	»	»	»	»	2
25 à 26	»	3	»	»	»	»	»	»	»	»	3
26 à 27	»	»	»	»	»	1	»	»	»	»	1

La température qui s'est répétée le plus fréquemment est

celle de 17 à 18°; on la retrouve pour 49 jours, et il est à remarquer que c'est à peu près la température moyenne donnée par l'ensemble des observations. Les températures qui se sont reproduites le plus fréquemment ensuite, sont celles qui s'écartent le moins de celle-ci; on peut voir encore qu'elles se rangent à peu près symétriquement des deux côtés de 49 pour l'ordre des grandeurs. Les physiciens rendent sensibles aux yeux, ces résultats abstraits, par une construction géométrique ou par une courbe qui permet de saisir d'un coup d'œil la marche d'une série de nombres.



La ligne tracée dans la figure précédente nous en donne un exemple. A quelques exceptions près, on voit que cette ligne se relève d'une manière assez symétrique pour atteindre une valeur *maximum* et pour s'abaisser ensuite. Sa forme est en général très-irrégulière, quand il s'agit d'une moyenne *arithmétique* prise entre des nombres qui

n'ont aucun rapport nécessaire entre eux; mais quand la moyenne n'est pas un résultat numérique purement abstrait et qu'il existe une température bien réellement en rapport avec la saison et la localité, température que des circonstances fortuites peuvent masquer plus ou moins, la courbe l'indique par sa régularité, pourvu que le nombre des observations soit suffisamment grand. Cette appréciation est très-délicate : je me propose d'en parler d'une manière toute spéciale dans mes prochaines lettres; mais, pour le moment, je me borne à la mentionner.

Revenons à notre premier exemple. J'ai dit que trois choses importantes sont à considérer quand on s'occupe du climat d'un pays, savoir, la température moyenne et les deux températures extrêmes de chaque jour. La différence de ces dernières températures constitue la *variation diurne*, élément très-essentiel, surtout pour l'hygiène. Cette variation n'est pas tous les jours la même; elle peut être influencée par bien des circonstances atmosphériques; mais quand on réunit les observations de tout un mois, et qu'on prend la moyenne arithmétique des trente et une variations diurnes observées, on obtient une quantité qui est plus ou moins dégagée des effets produits par des causes fortuites, et qui représente l'effet normal de la saison en rapport avec le climat. Cette variation diurne déterminée pendant un certain temps, est bien moins sujette à changer que la température moyenne; ce qu'on a observé une année, on l'obtient très-sensiblement les années suivantes. Pour en laisser juger,

je construirai un tableau analogue à celui qui a été donné plus haut pour les températures diurnes.

ANNÉES.	VARIATION qu'a subie la température en 24 h. au mois de juillet.		
	VARIATION moyenne.	*Maximum.*	*Minimum.*
1833. . .	10,4	17,8	7,1
1834. . .	10,1	15,0	5,9
1835. . .	12,6	16,3	9,0
1836. . .	10,2	15,3	6,7
1837. . .	10,0	14,9	6,3
1838. . .	9,5	15,8	4,9
1839. . .	9,4	14,9	4,8
1840. . .	8,3	12,4	4,0
1841. . .	7,9	13,2	4,6
1842. . .	10,8	14,0	3,4
MOYENNE.	9,92	14,96	5,67

Les variations de température pendant une journée de juillet, sont donc à peu près de dix degrés centigrades; cette valeur a peu changé d'une année à l'autre; cependant, en considérant les jours individuellement, je trouve qu'elle s'est élevée une fois, en 1833, jusqu'à 17°,8; et une fois, en 1842, elle n'a été que de 3°,4. L'intervalle parcouru entre ces deux variations extrêmes est de 14°,4.

La température moyenne d'un jour, pendant le mois de juillet, n'a pas dépassé les deux limites extrêmes 26°,2 et 11°,4; l'intervalle parcouru a donc été de 14°,8, nombre très-peu différent de 14°,4.

Quant à la manière dont les 310 variations de température observées en juillet, pendant dix années consécutives, se sont rangées des deux côtés de la moyenne, Votre Altesse en pourra juger par le tableau suivant, qui comprend aussi les variations de température pour le mois de janvier, pendant la même période de temps.

VARIATIONS DE LA TEMPÉRATURE EN 24 HEURES.			
En juillet.		En janvier.	
3 à 4°	1	1 à 2	8
4 à 5	7	2 à 3	31
5 à 6	10	3 à 4	61
6 à 7	24	4 à 5	68
7 à 8	34	5 à 6	50
8 à 9	41	6 à 7	32
9 à 10	42	7 à 8	22
10 à 11	41	8 à 9	20
11 à 12	38	9 à 10	8
12 à 13	26	10 à 11	4
13 à 14	19	11 à 12	3
14 à 15	16	12 à 13	1
15 à 16	6	13 à 14	1
16 à 17	3		
17 à 18	1		

La variation moyenne, pour juillet, a été d'un peu moins de dix degrés, comme nous l'avons vu. C'est encore à cette variation que correspond le plus grand nombre d'observations. Les autres nombres observés se rangent à peu près symétriquement des deux côtés de cette moyenne.

Pour le mois de janvier, la variation moyenne de température a été de 5°,16. Observons dès à présent que les nombres ne se groupent pas tout à fait symétriquement des deux côtés de la moyenne; plus tard, nous en trouverons peut-être la raison.

Votre Altesse aura remarqué aussi combien la variation diurne de la température est plus grande en juillet qu'en janvier; ceci ne tient pas à des causes accidentelles, mais à des causes constantes. En faisant le calcul pour chaque mois individuellement, on voit, en effet, décroître progressivement la variation diurne à mesure qu'on s'éloigne du mois le plus chaud; et elle est à son *minimum* pendant le mois de janvier, époque des plus grands froids de l'hiver.

Le tableau suivant nous donnera quelques nouvelles lumières à cet égard. La première colonne fait connaître la température moyenne de chaque mois, et la seconde, la variation que cette température éprouve dans l'espace de vingt-quatre heures.

La troisième colonne indique la variation que la température éprouve moyennement dans l'espace d'un mois. On l'obtient en comparant les deux températures extrêmes du mois; ce qui donne dix valeurs pour les dix années d'observations, et dans le tableau se trouve inscrite la moyenne arithmétique de ces dix nombres.

Enfin, la quatrième colonne donne, pour chaque mois, la différence entre les deux températures extrêmes observées pendant l'espace de dix années.

MOIS.	TEMPÉRAT. moyenne.	VARIATION diurne.	VARIATION mensuelle.	Plus grande variation en 10 ans.
Janvier . .	1;83	5;16	14;8	29;0
Février . .	4,10	5,70	13,0	23,2
Mars . . .	5,97	6,73	14,2	23,4
Avril . . .	8,50	8,33	15,0	24,5
Mai. . . .	13,97	10,07	17,6	26,0
Juin. . . .	17,40	10,20	17,9	25,2
Juillet. . .	18,00	9,97	16,7	22,8
Août . . .	18,03	9,80	17,2	25,3
Septembre.	15,20	8,30	15,4	23,2
Octobre. .	10,97	6,83	13,8	20,4
Novembre.	6,47	5,47	13,2	22,7
Décembre.	4,07	4,00	12,6	23,9

La variation diurne croît en même temps que l'élévation de température, mais il serait difficile de dire d'après quelle loi : elle est, toutes choses égales, un peu plus forte dans le premier semestre de l'année que dans le second.

Il semblerait assez, du reste, que cette variation dépend de la longueur des jours; elle atteint, en effet, son *maximum* en juin, et son *minimum* en décembre. Pendant ce dernier mois, elle est à peu près la moitié de ce qu'elle devient en été. On voit très-bien que la température, en s'abaissant de plus en plus, et en passant au-dessous de zéro, amènerait des variations de température de plus en plus faibles, et qui probablement seraient nulles, si l'on admettait la loi de continuité, bien avant d'arriver à une température égale à celle des espaces planétaires, ce qui répondrait environ à 60 degrés au-dessous de zéro.

La théorie n'admet comme nécessaire l'absence de variation diurne que dans le cas où la terre aurait une température égale à celle des espaces planétaires; elle se trouverait alors dans un équilibre stable de température, et recevrait des espaces célestes justement autant de chaleur qu'elle en rayonnerait vers eux.

On pourrait être curieux de connaître aussi quelle serait l'autre limite de la variation diurne de la température, c'est-à-dire celle où elle atteindrait sa plus grande valeur. Le *maximum* aurait lieu dans la supposition que le soleil vînt passer à notre zénith et que nous fussions sans atmosphère. Les rayons nous arriveraient verticalement à midi, ils ne seraient point éteints en partie par l'interposition de l'air, et, la nuit, le rayonnement serait à son *maximum*. Mais la température qui, en été, s'élève par intervalles à 32 degrés, pourrait, si le soleil passait au zénith, monter à 40 ou même à 45 degrés; et comme l'air, qui en absorbe dans ce cas $\frac{1}{4}$ au moins, n'existerait plus, cette température pourrait s'élever jusqu'à 60 degrés. Si nous connaissions exactement la loi qui lie entre elles les variations diurnes de la température et la température moyenne, nous pourrions, avec les données précédentes, assigner à la variation diurne sa valeur *maximum*.

Quand, au lieu de comparer les températures extrêmes d'un jour, on rapproche les deux températures extrêmes d'un même mois, les limites des variations deviennent plus larges; c'est un résultat auquel on pouvait s'attendre; car les causes diverses qui influent pour faire varier la tempé-

rature peuvent se modifier bien plus dans l'espace d'un mois que pendant l'intervalle de vingt-quatre heures : d'une autre part, la distance du soleil à l'équateur croît ou décroît plus sensiblement dans la première période que dans la seconde.

La variation est plus grande encore quand on compare les températures extrêmes d'un même mois, prises dans des années différentes : elle devient alors à peu près égale pendant chacun des mois de l'année; il se trouve même que la plus grande variation observée s'est présentée justement en janvier, le mois le plus froid de l'année.

Les variations mensuelles ne dépendent donc plus, ici, ni de l'élévation de la température ni de la longueur des jours. Ces deux causes si actives sur la période diurne se trouvent masquées par d'autres causes, au moins tout aussi influentes. Elles semblent tenir à l'état de l'atmosphère, qui permet des rayonnements et des refroidissements quelquefois considérables pendant les nuits d'hiver.

En voilà bien assez, je crois, sur les températures; Votre Altesse pourra reconnaître sans peine, dès à présent, quel rôle important la théorie des moyennes doit jouer dans la discussion des observations de toute espèce.

LETTRE XIV.

Loi de sortie de deux espèces d'événements simples dont les chances sont égales et les combinaisons peu nombreuses. Accord de la théorie et de l'expérience.

La considération des limites et celle des variations que subissent les appréciations individuelles entre ces limites, forment l'objet d'une théorie aussi intéressante qu'instructive. Je demanderai cependant à Votre Altesse la permission de ne pas l'aborder encore; je voudrais m'occuper d'abord de l'examen d'une question qui s'y rattache immédiatement, et qui aplanira beaucoup les voies par où nous devons passer.

Il s'agit de *déterminer la loi de sortie de deux espèces d'événements dont les chances sont parfaitement égales*, et qui peuvent arriver, soit séparément, soit simultanément, mais en se combinant de manières différentes.

Ainsi, je supposerai un pays dans lequel il meurt exactement autant d'hommes que de femmes. Si j'ouvre un de ses registres mortuaires, il est évident que la probabilité de trouver un décès masculin à la première ligne, est égale à la probabilité d'y rencontrer un décès féminin. De plus, si je parcours ce registre, en comptant séparément les décès

des hommes et ceux des femmes, la théorie me dit que les deux nombres comptés seront les mêmes; peut-être l'expérience ne confirmera pas entièrement les prévisions de la théorie; mais, du moins, comme nous l'avons déjà vu, les écarts seront d'autant moindres que le nombre des décès inscrits sera plus considérable.

Pour ne pas avoir à nous occuper de deux choses à la fois, je me bornerai à dire, dans les hypothèses successives que je vais faire, quels seraient les résultats de la théorie, en abandonnant à la pratique le soin de les justifier par un nombre suffisant d'observations.

Si, au lieu de considérer un à un tous les décès inscrits, je les prenais *deux à deux*, le premier avec le second, le troisième avec le quatrième, et ainsi de suite dans l'ordre des inscriptions, les groupes pourraient être de quatre espèces :

$$\text{Un homme et} \begin{cases} \text{un homme} \\ \text{une femme.} \end{cases}$$

$$\text{Une femme et} \begin{cases} \text{un homme} \\ \text{une femme.} \end{cases}$$

Mais chacun de ces groupes forme un événement composé qui a la même probabilité pour son arrivée, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$; il faudra donc, après un dépouillement suffisamment prolongé, que chaque groupe soit arrivé un même nombre de fois.

Si Votre Altesse considère que le second et le troisième groupe se composent également d'un décès masculin et

d'un décès féminin, elle concevra que les quatre groupes se réduiront réellement à trois :

Deux hommes.
Un homme et une femme.
Deux femmes.

Ainsi le second groupe, après le dépouillement, se sera reproduit autant de fois que le premier et le second ensemble. Voilà donc un certain ordre qui s'établira dans la *succession des événements.*

Prenons maintenant les inscriptions *trois par trois*, en assemblant successivement la première, la seconde et la troisième; la quatrième, la cinquième et la sixième, et ainsi de suite. Les groupes possibles seront les suivants : trois hommes, deux hommes et une femme, un homme et deux femmes, trois femmes. Les chances pour chacun de ces groupes ou événements composés seront respectivement 1, 3, 3 et 1; de sorte qu'après avoir terminé le relevé des inscriptions des décès, et avoir pris, chaque fois, un groupe de trois inscriptions consécutives, on trouvera que, sur huit de ces groupes, il y en aura un de trois hommes, un de trois femmes, trois de deux hommes et une femme, et trois de deux femmes et un homme. En partageant successivement de la même manière les décès par groupes de quatre, cinq, six, etc., on retrouverait la même régularité, toujours en supposant le nombre de décès suffisamment grand pour éliminer les effets des causes accidentelles.

Ainsi, dans les mêmes registres où les décès sont inscrits d'après les caprices en apparence les plus bizarres de la mort, on trouve une succession admirablement régulière, que l'on prenne les décès soit un à un, soit deux à deux, soit trois à trois, soit en les groupant de telle autre manière que l'on voudra. Une pareille régularité est bien propre à nous faire réfléchir sur ce que l'on est convenu de nommer le hasard.

Votre Altesse trouvera dans le tableau suivant les rapports dans lesquels se distribueraient les décès masculins et féminins, pour les treize groupes les plus simples que l'on puisse former. Ce tableau reproduit, sous une autre forme, le fameux triangle arithmétique de Pascal.

NOMBRE DE DÉCÈS dans chaque groupe.	MANIÈRE DONT LES DÉCÈS SONT DISTRIBUÉS DANS CHAQUE GROUPE. NOMBRE DE DÉCÈS FÉMININS.														TOTAL des décès.
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	
1 décès à la fois.	1	1													2
2 idem.	1	2	1												4
3 idem.	1	3	3	1											8
4 idem.	1	4	6	4	1										16
5 idem.	1	5	10	10	5	1									32
6 idem.	1	6	15	20	15	6	1								64
7 idem.	1	7	21	35	35	21	7	1							128
8 idem.	1	8	28	56	70	56	28	8	1						256
9 idem.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					512
10 idem.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				1024
11 idem.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			2048
12 idem.	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		4096
13 idem.	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	8192

Les nombres contenus dans chaque colonne horizontale expriment les chances relatives d'avoir, dans chaque groupe, un nombre déterminé d'hommes et de femmes.

Ainsi, la dernière colonne horizontale, montre qu'en groupant les décès *treize par treize*, sur 8192 groupes, il ne s'en trouverait qu'un seul composé de 13 hommes, 13 composés de 12 hommes et 1 femme; 78 composés de 11 hommes et 2 femmes, 286 composés de 10 hommes et 3 femmes, et ainsi de suite.

Le groupe qui réunit le plus de chances en sa faveur, est celui qui présente autant de décès masculins que de décès féminins.

Du tableau précédent, nous pouvons tirer par induction, les conclusions suivantes, qu'on démontrerait d'ailleurs facilement par la théorie :

1° A mesure que le groupe des décès augmente d'une unité, le nombre total des chances possibles se trouve doublé.

2° Sur le nombre total des chances, on n'en a jamais qu'une seule pour avoir à la fois tous décès soit masculins soit féminins.

3° Le nombre des espèces de groupes différents surpasse d'une unité le nombre des décès formant chaque groupe.

4° Chaque espèce a sa probabilité particulière; et le groupe le plus probable est celui qui donnerait autant de décès féminins que de décès masculins, quand le nombre est pair.

Quand le nombre des décès formant un groupe est im-

pair, il y a deux espèces de groupes également possibles qui ont la probabilité la plus forte, savoir : la succession d'autant de décès masculins que de décès féminins moins un, ou d'autant de décès féminins que de décès masculins moins un.

5° Les autres espèces de groupes se placent des deux côtés des précédents d'une manière symétrique, et à mesure qu'ils s'en éloignent, leurs probabilités respectives diminuent.

Il suffit d'avoir écrit la première moitié d'une des colonnes horizontales, pour savoir comment procèdent les autres termes.

Notre tableau numérique contient donc une échelle exprimant le degré ou la *loi* de probabilité de tous les événements composés, dès qu'ils ne dépendent pas de plus de treize espèces de combinaisons. Quand le nombre est plus considérable, on pourra faire usage d'une table que je donnerai par la suite.

Je viens d'exposer ce que la théorie fait connaître au sujet de la loi de sortie de deux événements qui ont exactement la même probabilité. Votre Altesse pourrait être curieuse de savoir jusqu'à quel point l'expérience suffisamment prolongée, justifierait les prévisions du calcul. J'ai éprouvé cette même curiosité; mais j'aurais dû renoncer au plaisir de la satisfaire, s'il m'eût fallu compulser les registres mortuaires d'une ville. Outre qu'un pareil travail serait très-fastidieux, l'objet sur lequel l'imagination doit s'arrêter,

n'est pas de nature à plaire et à procurer un dédommagement suffisant.

Heureusement j'ai pu recourir à des expériences plus expéditives et tout aussi concluantes. J'ai fait mettre dans une urne 40 boules blanches et 40 boules noires; de sorte que la probabilité de prendre une boule de l'une ou de l'autre couleur, était la même. Ensuite, pour que la probabilité ne fût pas altérée pendant le cours des épreuves, on remettait dans l'urne la boule qu'amenait chaque tirage, après avoir eu soin, bien entendu, de prendre note de sa sortie et de sa couleur.

En usant de ces diverses précautions, j'ai fait faire successivement 4096 tirages. Voyons quels ont été les résultats de ces expériences.

En considérant d'abord les boules une à une, j'ai trouvé qu'il en est sorti 2066 blanches et 2030 noires : la théorie montre que ces deux nombres devaient être égaux, et valoir chacun 2048. Si la théorie ne s'accorde pas avec l'expérience, on conviendra du moins qu'il s'en faut de bien peu. En effet, sur 2000 boules tirées, au lieu d'avoir 1000 blanches et 1000 noires, j'ai eu, en moyenne, 1008 blanches et 992 noires; la discordance est donc de 8 sur 1000, ou proportionnellement, de 0,008, nombre très-faible. Ne perdons pas de vue d'ailleurs que, si j'avais eu la patience de faire faire un nombre de tirages plus considérable, la discordance aurait été plus faible encore.

En prenant ensuite sur ma liste d'inscription les boules

deux à deux, la première avec la seconde, la troisième avec la quatrième, et ainsi de suite, j'ai pu former, au moyen de mes 4096 tirages, 2048 groupes binaires. Le tableau donné plus haut m'apprend que, pour un groupe de deux boules blanches, je dois en trouver deux d'une blanche et d'une noire, et un de deux boules noires. Au lieu de cela, j'ai trouvé 543 groupes de deux boules blanches, 980 groupes d'une blanche et d'une noire, et 525 de deux noires; ou bien, en prenant les nombres proportionnels, ce qui nous sera plus utile pour établir nos rapprochements, j'ai obtenu 1,06; 1,91; 1,02; au lieu de 1; 2 et 1. La plus grande discordance est ici de 0,09 en moins; elle surpasse donc de beaucoup celle que nous avons trouvée précédemment, sans s'élever cependant à un dixième.

En composant des groupes ternaires, je n'ai pu en former que 1365 au moyen de mes 4096 tirages; ils se sont distribués proportionnellement de la manière suivante :

	1,06	3,03	2,77	1,10;
au lieu de	1	3	3	1.

La plus grande discordance entre l'expérience et la théorie est ici de 0,23 en moins, et tombe sur le nombre 2,77. Sur mes 1365 groupes de trois boules, les trois huitièmes, c'est-à-dire 510, auraient dû renfermer deux boules noires et une blanche; au lieu de ce nombre, je n'en ai compté que 474.

A mesure qu'on fait entrer plus de boules dans un groupe,

le nombre des groupes sur lequel portent les épreuves, va en diminuant.

Quand j'ai pris les boules quatre à quatre, dans l'ordre de sortie, j'ai formé 1024 groupes quaternaires, qui se sont partagés proportionnellement de la manière suivante :

	1,07	4,18	5,78	5,84	1,11;
au lieu de	1	4	6	4	1.

La plus grande discordance est de 0,22 en moins.

Sur 819 groupes de cinq boules prises à la fois, les nombres proportionnels ont été

	1,2	4,9	10,8	8,7	5,3	1,1;
au lieu de	1	5	10	10	5	1.

La plus grande discordance est de 1,3 en moins. Déjà les discordances qui avaient été successivement dans les millièmes, les centièmes et les dixièmes, affectent les unités principales.

Sur 683 groupes de six boules à la fois, les nombres proportionnels ont été

	1,6	6,1	15,5	18,0	15,5	6,5	0,8;
au lieu de	1	6	15	20	15	6	1.

La plus grande discordance est de 2 en moins.

Sur 388 groupes de sept boules à la fois, les nombres proportionnels ont été

	2,0	7,4	22,7	33,0	32,4	20,8	8,8	0,9 ;
au lieu de	1	7	21	35	35	21	7	1.

La plus grande discordance est de 2,6 en moins. Sans pousser ces rapprochements plus loin, Votre Altesse voit que les discordances entre les expériences et les calculs vont en augmentant à mesure que le nombre des groupes ou des épreuves diminue, ce qui est conforme à la théorie. Nous savons en effet que la précision des résultats croît comme la racine carrée du nombre des observations. Dans notre dernier exemple, nous n'avions réellement que 388 observations pour vérifier 128 événements possibles; ce n'est pas même cinq observations pour un événement. Dans le premier exemple, au contraire, nous avions 4096 observations pour vérifier deux événements simples seulement; c'est 2048 observations pour chacun de ces événements simples. Mais les racines carrées des nombres 5 et 2048 sont à peu près comme 1 est à 20; les précisions ne devaient être que dans le rapport de ces nombres.

Il en résulte donc qu'en opérant à l'infini, et en prenant les boules soit une à une, soit deux à deux, soit trois à trois, etc., on aurait la certitude que les sorties se présenteraient comme l'indiquent les calculs.

Or, quand on procède par voie d'expérience, il est impossible de faire que les épreuves soient en nombre infini; on

ne doit donc pas s'attendre à obtenir des résultats rigoureusement concordants avec ceux que donne la théorie, ou bien si la concordance s'établissait, ce ne pourrait être qu'accidentellement; il arrive néanmoins que les écarts ou discordances deviennent d'autant moindres que les épreuves sont plus multipliées. Il y a plus, nous aurons occasion de voir qu'on peut assigner la probabilité que ces discordances ne s'étendent pas au delà de certaines limites données.

L'homme est borné, la nature est infinie; l'être suprême seul peut voir l'expérience marcher d'accord avec ses lois; pour lui le temps n'est rien, et toutes les combinaisons imaginables peuvent se réaliser successivement. Ces désaccords apparents ne se trouvent que dans la sphère de l'homme, et répandent une variété remarquable sur les événements qui le concernent; cette variété, qui est en partie son ouvrage, a cependant des limites étroites, et ne saurait altérer l'ordre général des choses.

LETTRE XV.

Loi de sortie de deux espèces d'événements simples dont les chances sont égales et qui se combinent d'un nombre considérable de manières; échelle de possibilité; sa construction.

De ma lettre précédente résulte ce fait curieux, que si une urne contient un nombre infini de boules blanches et un nombre également infini de boules noires, et qu'on vienne à les tirer une à une, en inscrivant à chaque tirage la boule sortie avec l'indication de sa couleur, la série de ces boules procèdera de la manière la plus régulière. Ainsi, en les prenant une à une, on trouvera que le nombre des boules blanches tirées est exactement égal à celui des boules noires.

En les prenant deux à deux, le nombre des groupes d'une boule blanche et d'une boule noire sera double du nombre des groupes contenant soit deux boules blanches, soit deux boules noires.

J'ai indiqué la loi de sortie, dans l'hypothèse où l'on grouperait les boules par trois, par quatre, par cinq et jusque par treize. J'ai mis ensuite les résultats de l'expérience à côté de ceux du calcul; et Votre Altesse a pu reconnaître que les légères discordances ne provenaient que du peu de tirages qui avaient été faits. Si les tirages pouvaient se prolonger à

l'infini, les résultats observés seraient absolument conformes à ceux qui ont été calculés.

Il ne faut pas croire que cet accord s'arrêterait aux groupes les plus simples; j'aurais pu étendre mon tableau davantage, et assigner d'avance, par le calcul, l'ordre de sortie des boules, en les prenant par quatorze, par quinze, ou par telle autre combinaison supérieure, par mille, par dix mille, par un million, ou même en les prenant en nombre beaucoup plus considérable encore.

Quand le nombre des boules prises à la fois est un peu grand, toutes les chances possibles sont tellement multipliées qu'il faudrait désespérer de vérifier la théorie par l'expérience. En ne prenant que douze boules à la fois, nous avons déjà vu qu'il faut faire au moins 4096 tirages pour que chaque groupe possible puisse arriver une seule fois. Mais le nombre des tirages doit être incomparablement plus grand, si l'on veut que les groupes arrivent conformément aux indications de la théorie.

Si l'on prenait 1000 boules à la fois, il faudrait pour amener, au moins une fois, chaque groupe possible avec tous les arrangements qu'il comporte, plus de siècles que nous n'en comptons depuis la création; encore je suppose qu'on ne fît aucun tirage inutile. Que serait-ce donc, s'il s'agissait de répéter tous les tirages possibles assez de fois pour amener un accord parfait entre la théorie et l'expérience? Il faudrait presque l'éternité pour arriver à un résultat satisfaisant.

Il est inutile de songer à de pareilles épreuves. Heureusement nous pouvons nous en passer, dans les applications que nous aurons à faire de la théorie des probabilités aux sciences d'observation.

J'espère même faire comprendre à Votre Altesse qu'il suffit d'avoir calculé soigneusement tous les tirages possibles avec les chances qu'ils présentent, pour un seul cas particulier, en supposant, par exemple, que l'on prenne 999 boules à la fois, et ce calcul suppléera à ceux que j'aurais dû faire pour toute autre combinaison, pourvu qu'elle renferme un plus grand nombre de boules que celui indiqué dans le tableau précédent, le nombre des boules tirées allât-il même à l'infini.

Arrêtons-nous donc au cas particulier où l'on tirerait 999 boules à la fois. Pour suivre l'ordre de notre premier tableau, l'événement qui se présenterait d'abord, serait celui qui consisterait à amener 999 boules blanches sans mélange d'une seule boule noire. Or, ce tirage serait extraordinairement peu probable : on n'aurait, pour sa sortie, qu'une seule chance sur un nombre total de chances qui exigerait plus de *trois cents chiffres* pour l'écrire.

L'événement suivant, qui consisterait à prendre 998 boules blanches et une noire, aurait encore une probabilité extraordinairement faible ; et il en serait de même pour tous les tirages d'un grand nombre de boules blanches avec quelques boules noires, ou d'un grand nombre de boules noires avec

quelques boules blanches. Ces tirages peuvent être considérés comme à peu près impossibles.

On n'obtient de probabilité un peu appréciable qu'en supposant que, sur 999 boules tirées, il s'en trouve au moins 420 blanches et pas plus de 579; de même pour les boules noires. Dans l'un et l'autre cas, la probabilité du tirage ne se trouve représentée que par la fraction très-petite 0,000 000 04.

La probabilité augmente à mesure que le nombre des boules blanches, dans chaque tirage, approche de plus en plus d'être égal au nombre des boules noires; et le tirage qui offre la probabilité la plus grande est celui qui amènerait 500 boules blanches et 499 boules noires, ou *vice versa*. Cette probabilité serait 0,025225.

Si l'on voulait soumettre la théorie à l'expérience, on serait donc à peu près sûr d'avance que chaque tirage de 999 boules amènerait environ autant de boules blanches que de boules noires; tous les tirages, en effet, où les boules d'une couleur excèderaient de 160 celles de l'autre couleur, ne réuniraient pas même un *demi-millionième* de probabilité en leur faveur.

Il serait superflu, en construisant une table de possibilité pour la sortie d'un groupe quelconque de 999 boules, de tenir compte de ces derniers tirages dont le nombre s'élève à 840; on peut se borner à effectuer le calcul pour les 160 groupes, qui ne contiennent pas moins de 420 et pas plus de 579 boules blanches. C'est ce que j'ai fait dans la table qui se

trouve à la suite de ces lettres, sous le nom d'*échelle de possibilité*.

Je n'ose me flatter d'avoir été suffisamment clair. Si mes explications laissaient encore à désirer, à défaut de la parole, peut-être réussirai-je mieux en cherchant à parler aux yeux. Ce que l'on entend excite moins vivement l'esprit que ce que l'on voit, a dit un des penseurs les plus spirituels de l'antiquité :

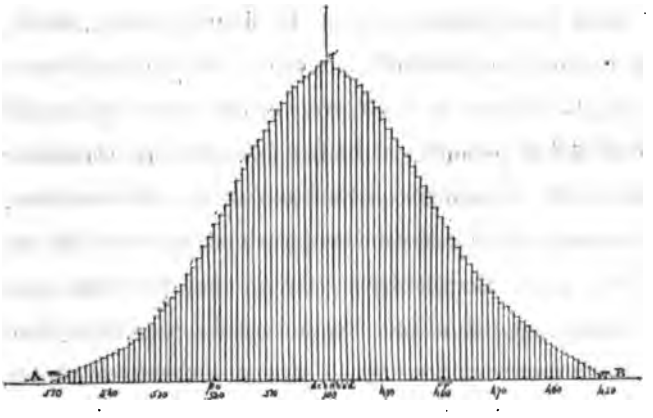
Segnius irritant animos demissa per aurem
Quam quæ sunt oculis subjecta fidelibus.

Je n'ai pas oublié, du reste, combien Votre Altesse avait pris goût à la géométrie et particulièrement à celle qui tend à donner du corps et du relief à la pensée. On a beaucoup abusé des constructions graphiques, mais j'espère qu'un semblable reproche ne me sera pas applicable.

Pour en revenir à l'exemple que j'avais choisi, rappelons-nous d'abord que le tirage de 499 boules blanches et de 500 boules noires est celui qui offre le plus de chances en sa faveur. Le tirage de 498 boules blanches et de 501 boules noires, a déjà une probabilité un peu moins forte.

A mesure que, dans chaque tirage de 999 boules, le nombre des boules blanches diffère davantage du nombre des boules noires, la probabilité de la sortie diminue. La figure suivante rend ce décroissement sensible par la hauteur des petits rectangles successifs construits sur ab', $b'c'$, $c'd'$, etc. Ainsi, la probabilité du tirage de 480 boules blanches sur 999

boules, se trouve représentée pour la hauteur du petit rectangle construit sur *o'p'*. La table de possibilité donnerait le nombre 0,011794; et la figure montre en effet que cette probabilité est à peu près la moitié de la probabilité *maximum*, qui consiste à prendre 499 boules blanches dans un seul tirage, probabilité représentée, dans la figure, par le rectangle le plus grand, celui construit sur *ab'*.



Les petits rectangles s'abaissent ensuite si rapidement que celui qui répond à la probabilité de prendre 450 boules blanches dans un tirage de 999, boules a une hauteur à peu près nulle. Et cependant, pour suivre la loi de continuité indiquée par la théorie, il faudrait en construire encore 450 successivement décroissant de hauteur. J'ai pris le parti de ne pas les représenter dans la figure, car la loupe même n'aurait pas suffi pour les faire apprécier. Dans notre échelle de possibilité j'ai pu, au moyen des nombres, porter les

choses un peu plus loin; mais les nombres mêmes ont dû être négligés pour les tirages différents, qui, sur 800 boules tirées, en supposent moins de 420 blanches.

Tous les petits rectangles juxta-posés dans notre figure, indiquent, chacun par sa grandeur, la probabilité d'un des tirages les plus probables de 800 boules.

La figure est symétrique des deux côtés de l'axe *aa'*, et cela doit être, car ce qui a lieu pour les boules blanche doit avoir lieu également pour les boules noires. Ainsi, les deux rectangles construits sur *po* et sur *p'o'* des deux côtés et à égale distance de l'axe, sont égaux, parce qu'en effet la probabilité de prendre 519 boules blanches et 480 noires est égale à celle de prendre 480 boules blanches et 519 noires.

Un coup d'œil jeté sur la figure précédente fait saisir la loi de sortie des boules, pour le cas qui nous occupe, bien mieux que tous les raisonnements possibles. *Ce que l'on peut parier pour chaque tirage individuellement, est proportionnel à la hauteur du petit rectangle qui correspond à ce tirage.* Si les hauteurs de ces petits rectangles représentaient des piles d'écus, en ramassant toutes celles qui se trouvent déposées entre les limites *m* et *m'*, je doute que l'on s'embarrassât fort d'y joindre celles extrêmement petites qui seraient placées au delà de ces limites. Tous les écus qui les composent ne formeraient guère plus d'un millième de ceux qu'on aurait ramassés.

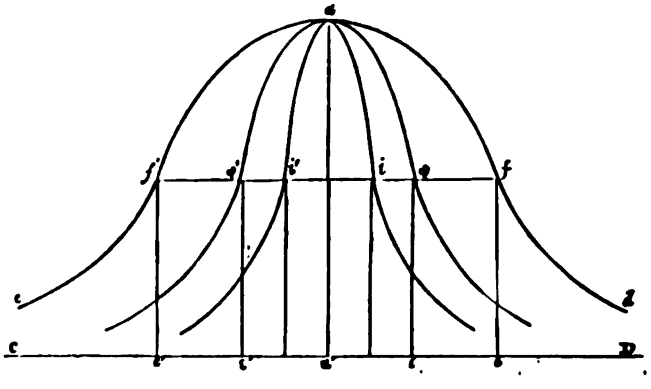
LETTRE XVI.

L'échelle de possibilité est d'un emploi général.

J'essaierai maintenant de donner plus de généralité aux idées émises dans mes deux lettres précédentes, et de faire comprendre que l'échelle de possibilité, telle que je l'ai calculée, peut servir dans tous les cas, dans ceux où le nombre des boules, prises à chaque tirage, serait plus grand que 999, comme dans ceux où il serait moindre. En donnant une si grande généralité à notre table, j'en ferai suffisamment apprécier l'utilité.

Je suppose la courbe *cf'afd*, qui représente, dans la figure ci-après, la série des nombres contenus dans notre table de possibilité. Cette ligne est la même que celle qui a été construite dans ma lettre précédente; seulement j'ai substitué une courbe continue à une ligne brisée. Je m'arrête encore aux points *c* et *d*, bien que la ligne doive s'étendre au delà de ces points jusqu'à des limites très-éloignées que je n'ai pu indiquer dans la figure. Nous sommes

forcés ici, comme pour l'échelle numérique, de négliger ce qui n'a pas de valeur appréciable.



Il faut concevoir la ligne CD partagée en 160 parties égales et symétriquement placées des deux côtés du point a'. Chaque point de division e indique, par sa distance au point a', la différence numérique entre les boules des deux couleurs dans un tirage de 999 boules, et la longueur de la perpendiculaire correspondante ef représente la probabilité de ce même tirage.

Supposons maintenant qu'on veuille calculer et construire la courbe de possibilité pour un nombre de boules quadruple à chaque tirage : on prend 3996 boules, par exemple, au lieu de 999. Afin de rendre les choses comparables, je ferai servir encore la perpendiculaire aa' pour représenter la probabilité de l'événement le plus probable. La théorie indique ensuite que la nouvelle courbe de possibilité aura la forme $\varphi' a' \varphi$, dans laquelle toutes les perpendiculaires fe, fe', etc., de la pre-

mière courbe n'ont fait que se rapprocher de l'axe *aa'* dans le rapport de 1 à 2, et ce rapport est déterminé par celui des racines carrées des nombres 999 et 3996 relatifs aux deux courbes.

Si l'on quadruplait encore le nombre des boules dans chaque tirage, et qu'on le fît de 15984, la courbe de possibilité aurait la nouvelle forme *iai'* et se trouverait resserrée du double dans le sens de sa largeur par rapport à la courbe $\varphi a \varphi$, et du quadruple par rapport à la courbe *f'af;* ce qui veut dire que, toutes choses égales, la différence numérique entre les boules des deux couleurs serait proportionnellement réduite de moitié par rapport aux tirages de 3996 boules, et du quart par rapport aux tirages de 999 boules.

Plus le nombre des boules que l'on prend à chaque tirage est considérable, plus il tend à s'établir une égalité entre le nombre des boules blanches et le nombre des boules noires. Si même les choses étaient poussées à l'extrême, et si chaque tirage amenait un nombre infini de boules, la ligne de possibilité se réduirait sensiblement à la perpendiculaire *aa'*, c'est-à-dire qu'on serait certain de prendre à chaque tirage composé d'un nombre infini de boules, autant de boules blanches que de boules noires.

La ligne *cad* suffit donc pour représenter de quelle manière tous les résultats se groupent autour de la moyenne, quand ils sont suffisamment nombreux.

Tâchons maintenant de nous rendre compte de la théorie par l'expérience. Je me suppose devant une urne contenant un nombre infini de boules blanches et noires, mêlées dans

un rapport parfaitement égal. On m'en cache le contenu, mais on me permet de faire des épreuves ou des tirages successifs pour reconnaître ce que contient l'urne. Voyons la marche que j'aurai à suivre.

Si l'on ne permet que de faire un seul tirage, faudra-t-il, pour arriver plus sûrement à mon but, prendre peu ou beaucoup de boules? Le bon sens me dit, avant la théorie, d'en prendre beaucoup. En effet, si je n'en prenais qu'une seule, il me serait impossible de reconnaître comment les boules sont réparties, puisque je n'aurais fait sortir de l'urne qu'une boule noire ou une boule blanche.

Si j'en prends 6, par exemple, il peut se présenter sept cas différents : ou bien je prendrai 6 boules blanches, ou je prendrai 5 boules blanches et 1 noire, ou 4 boules blanches et 2 noires, ou 3 boules blanches et 3 noires, et ainsi de suite. Mais les sept tirages ne sont pas également probables : le premier a moins de chances que le second, le second en a moins que le troisième, et celui qui en a le plus, c'est le tirage de 3 boules blanches et de 3 boules noires. Nous avons pour ce tirage 20 chances sur 64 chances possibles, comme l'enseigne le tableau déjà donné dans ma XIVe lettre.

Nous avons donc quelque espoir de tomber sur ce tirage. Si nous le manquons, nous prendrons peut-être 2 boules blanches et 4 noires, ou 4 boules blanches et 2 noires, ce qui nous donnerait une idée approchée de la distribution générale des boules dans l'urne, sans la faire connaître exactement. Or, nous avons une probabilité très-grande de faire l'un de ces

trois tirages; en effet, les deux derniers tirages ont, chacun, 15 chances en leur faveur; en les réunissant aux 20 chances que nous avons déjà, nous aurons 50 chances sur 64 pour prendre 2, 3 ou 4 boules blanches parmi les 6 boules tirées.

Remarquons d'ailleurs que c'est toujours à des approximations plus au moins grandes qu'on doit s'en tenir dans les sciences d'observation; quand on tombe sur le résultat véritable, ce n'est guère qu'accidentellement.

Imaginons maintenant que nous passions à de grands nombres, que nous prenions 999 boules à la fois. Nous sommes à peu près sûrs que nous ne pourrons prendre toutes boules d'une seule couleur; il est même à peu près impossible que, sur les 999 boules tirées, il ne s'en trouve de 420 à 579 blanches, comme Votre Altesse a pu le voir dans ma XVe lettre. Or, en supposant que nous eussions la main assez malheureuse pour prendre l'un de ces nombres, il faudra convenir cependant que nous ne serons pas trop loin de la vérité quand nous dirons, d'après l'épreuve unique que nous aurons faite, que l'urne, sur 999 boules, contient 420 boules blanches; mais, plus généralement, si nous ne prenons pas exactement 499 ou 500 boules blanches, nous nous écarterons très-peu de ces nombres.

La probabilité de chaque tirage se trouve indiquée dans notre échelle de possibilité; et afin de permettre d'établir plus facilement des comparaisons, j'ai représenté par 1, dans la table voisine, la probabilité de prendre autant de boules blanches que de boules noires, et j'ai exprimé en parties de

cette unité les probabilités des autres tirages. La probabilité est déjà réduite de moitié, quand il s'agit de prendre 481 boules blanches sur 999 boules tirées. Elle se réduit à un millième, quand il s'agit de prendre 441 boules blanches, et elle n'est plus que 0,000 003 pour en prendre 420. De sorte que l'on peut parier un million contre cinq, qu'en prenant 999 boules, l'on tombera plutôt sur le véritable rapport que sur une combinaison qui renfermerait 420 boules blanches. Dans tous les cas, nous sommes à peu près certains que le tirage que nous ferons, sera quelqu'un de ceux compris dans l'étendue de notre échelle, et renfermera, par conséquent, un nombre de boules blanches qui ne sera pas inférieur à 420 et pas supérieur à 579. Cette erreur, soit en plus, soit en moins, est de 79 sur 999, ou à peu près de 8 boules blanches sur 100 boules tirées.

Allons plus loin encore; et, au lieu de 999 boules, prenons-en 9999. Pour que l'expérience fût d'accord avec la réalité, il faudrait, à chaque tirage, prendre 4999 ou 5000 boules blanches. Si ce tirage a peu de probabilité, à cause du grand nombre de combinaisons possibles, du moins nous serons à peu près certains de nous en écarter très-peu. Nous savons déjà que les limites se resserrent à mesure que la racine carrée du nombre des observations augmente; cela doit s'entendre de la manière suivante : précédemment, nous supposions un tirage de 999 boules, nous le faisons maintenant de 9999; or, les racines carrées de ces nombres sont comme 1 à 3,16 à peu près; c'est dans ce rapport aussi que vont se resserrer nos

limites. Quand nous ne prenions que 999 boules, nous étions convaincus que, dans notre tirage, il se trouvait de 420 à 579 boules blanches, c'est-à-dire que nous ne nous trompions pas de 8 boules par cent, soit en plus, soit en moins. Eh bien, nous pouvons assurer avec la même probabilité, quand nous prenons 9999 boules, que le tirage nous expose à une erreur au moins trois fois moindre, et que nous ne nous tromperons pas de 3 boules par cent, soit en plus, soit en moins.

En prenant 99999 boules à la fois, nous pouvons affirmer avec la même probabilité que les boules que nous tenons en main, sont réparties de telle façon que, sur 100, l'erreur à craindre n'est pas d'une unité. Si, par conséquent l'urne contient autant de boules blanches que de boules noires, nous en aurons pris, par cent, 49, 50 ou 51 blanches; et l'on peut regarder les autres combinaisons comme à peu près impossibles.

Votre Altesse jugera avec quelle haute probabilité elle pourrait affirmer qu'une urne contient en proportions égales des boules blanches et des boules noires, si l'expérience lui avait donné cette égalité par un tirage comprenant un nombre excessivement grand de boules.

Ces résultats peuvent être d'une application utile dans les sciences physiques et chimiques. Si l'on opère sur de grands nombres; et si, au lieu de l'égalité, on obtient une différence, elle doit avoir une cause, soit parce que l'égalité supposée n'existe pas, soit parce que l'on a mal opéré.

Revenons maintenant à l'exemple que j'avais choisi. Nous avons pris un certain nombre de boules, 999 par exemple. Combien, dans ce nombre, en tenons-nous de blanches, et combien de noires? Nous ne pouvons rien affirmer; cependant nous pouvons assigner la probabilité qui appartient à chaque tirage possible. Or, comme nous l'avons vu, chacune de ces probabilités se trouve déjà calculée dans notre échelle de possibilité. Seulement nous avons omis de donner les probabilités pour les tirages qui sont à peu près impossibles.

Maintenant l'expérience se fait : on ouvre la main et l'on compte les boules, en séparant les blanches des noires : aurons-nous effectivement autant de boules noires que de boules blanches? probablement non; mais nous aurons quelque combinaison voisine, et d'autant plus voisine que notre tirage comprendra plus de boules.

Le chimiste serait celui qui aurait le plus de chances d'arriver à des résultats conformes à la vérité, s'il était parfaitement sûr de ses analyses. En puisant un verre d'eau dans une source pure, les atomes d'oxygène et d'hydrogène s'y trouveraient en nombre infini, et par conséquent dans un rapport qui est celui assigné par le Créateur à la composition de l'eau. Ce cas se rapporte à celui où l'on extrait de l'urne un nombre de boules infiniment grand.

LETTRE XVII.

Théorie des moyennes.

J'ai fait connaître dans mes trois lettres précédentes, la loi de sortie d'un événement qui a, pour et contre son arrivée, un égal nombre de chances. J'ose me flatter que j'aurai été suffisamment compris et que les détails dans lesquels j'ai été forcé d'entrer, n'auront pas été trop dépourvus d'intérêt.

J'ai particulièrement insisté sur le cas où les chances étaient au nombre de 999, et pouvaient, par leurs combinaisons, donner naissance à mille événements différents. Je vais essayer de faire comprendre comment cette théorie se rattache directement à celle des moyennes.

Je prendrai un exemple dans lequel les résultats des observations peuvent différer entre eux par mille degrés de grandeur. Pour fixer les idées, je supposerai que j'aie mesuré la hauteur du Drachenfelds, dont le sommet domine si majestueusement le cours du Rhin et qui semble dire un dernier adieu à ce beau fleuve, au moment où il quitte la vallée dans laquelle il était resserré. Je supposerai, de plus, qu'au lieu de trouver la hauteur réelle, j'aie obtenu chaque fois des valeurs différentes, mais sans qu'il existe aucune

cause qui donne une facilité plus grande aux erreurs, soit en plus, soit en moins. La moyenne de toutes ces valeurs particulières est un nombre qui n'est probablement pas la hauteur réelle de la montagne, mais qui s'en écartera peu. Je ne sais pas jusqu'où pourraient aller les limites des erreurs, si je continuais mes observations. Je substitue donc à une quantité que j'ignore, une autre que je connais; le tout est de connaître l'erreur à laquelle je m'expose.

En considérant la chose d'une manière générale, la véritable hauteur de la montagne correspond au tirage d'un nombre égal de boules blanches et de boules noires : c'est-à-dire que, parmi toutes les combinaisons possibles, il se trouverait à la longue autant de mesures plus petites que de mesures plus grandes que la véritable hauteur cherchée, qui serait égale à leur moyenne. Au lieu de cette valeur, j'en trouve une autre qui sera d'autant plus rapprochée de celle que je devais avoir, que, toutes choses égales, j'aurai fait plus d'observations. Voilà pour la précision de mon résultat final.

Mais, à côté de la question qui vient de nous occuper, il s'en présente une autre peut-être plus curieuse encore. La voici : les résultats observés ne tombent pas indifféremment des deux côtés de la moyenne, mais *dans un ordre déterminé*, qui est celui assigné par l'échelle de possibilité.

Ainsi, quand on mesure une hauteur, entre la plus grande et la plus petite valeur obtenue se présentent les autres valeurs à des distances différentes de la moyenne, mais le plus

grand nombre tombent dans le voisinage même de cette moyenne. Cela provient de ce qu'à mesure que l'on s'éloigne du véritable nombre cherché, la probabilité du résultat diminue de plus en plus, conformément à la loi qui règle la sortie de deux espèces d'erreurs dont les chances sont égales et qui peuvent se combiner de différentes manières. En supposant qu'on ait mesuré le Drachenfelds un nombre de fois assez grand pour qu'on soit autorisé à croire que la différence entre la théorie et le calcul a disparu, la moyenne de toutes les mesures donnera la hauteur cherchée. De plus, en groupant les observations par ordre de grandeur, et en procédant par différences de 1 décimètre, les deux plus grands groupes seront ceux qui donneront la hauteur de la montagne avec une erreur de 1 décimètre en plus ou en moins. Les deux groupes suivants donneront la hauteur avec une erreur de 2 décimètres, et ainsi de suite. Plus on s'écartera de la moyenne et moins les groupes renfermeront d'observations.

Nous voilà en état de reconnaître à priori l'ordre qui s'établira dans les erreurs. Chaque série d'observations a son échelle particulière de possibilité, comme je l'ai indiqué dans ma lettre précédente. La nature de cette échelle est déterminée par le nombre des observations, comme aussi par les moyens plus ou moins précis qu'on a employés pour faire les observations. Il ne faut pas oublier, du reste, que nous sommes toujours rigoureusement dans l'hypothèse que les chances de se tromper en plus sont les mêmes que celles de se tromper en moins.

N'est-il pas merveilleux que des erreurs que l'on fait accidentellement, se rangent dans un ordre aussi parfait? et que des maladresses procèdent, à notre insu, avec une symétrie qui semble être le résultat des combinaisons le mieux raisonnées?

La courbe qui figure l'ordre de succession et le nombre des résultats serait identiquement la même que la courbe de possibilité, en sorte qu'une erreur plus ou moins grande doit être assimilée au tirage d'un nombre de boules blanches et de boules noires s'écartant plus ou moins de l'égalité sous le rapport numérique.

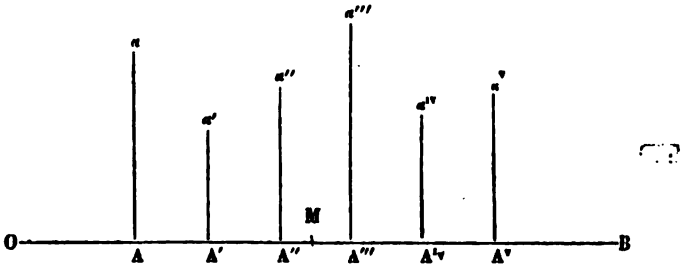
Si les chances de se tromper en plus n'étaient pas les mêmes que celles de se tromper en moins, la courbe figurant la succession des résultats perdrait de sa symétrie, sans cesser d'offrir encore une certaine régularité; son sommet ne se trouverait plus à égale distance de ses deux extrémités. J'aurai l'occasion de revenir sur cette courbe, quand je parlerai, plus tard, d'une manière générale, de l'influence des causes accidentelles.

Quand on se borne à prendre une moyenne arithmétique entre différentes quantités entièrement indépendantes les unes des autres, la ligne qui figure les observations ne présente plus aucune espèce de régularité; ou, si l'on en trouve une, elle ne peut être qu'accidentelle.

Comparée à la théorie des balances ou à celles des leviers en mécanique, la théorie des moyennes offre des analogies très-curieuses; je me bornerai à citer la principale, elle

peut contribuer à répandre un nouveau jour sur ce sujet intéressant.

On a mesuré, à partir du point O, plusieurs parties d'une ligne droite OB.



La partie OA a été mesurée 20 fois, et je l'indique en déposant, sur son extrémité A, une pile Aa de 20 pièces de 1 franc; la partie OA' a été mesurée 11 fois; je l'indique également en déposant, sur son extrémité A', une pile de 11 pièces de 1 franc. J'en fais de même pour chacune des autres parties mesurées, en sorte que chaque pile ou chaque perpendiculaire Aa, $A'a$, $A''a''$, etc., marque par sa hauteur, le nombre des observations relatives à chaque longueur mesurée.

Maintenant on conçoit que toutes ces piles de 1 franc forment ensemble un certain poids, et si elles sont placées sur un fléau de balance ou sur un levier OB que nous supposerons sans pesanteur pour simplifier les choses, il faudra, pour les maintenir en équilibre sur ce levier, choisir convenablement le point d'appui. Or, ce point sera justement en

M, à l'extrémité de *OM*, moyenne de toutes les longueurs mesurées *OA*, *OA'*, *OA''*, etc.; les piles de 1 franc placées à droite du point *M* feront équilibre aux piles placées à gauche. Tout se passera comme si l'on avait empilé, au point *M* même, autant de pièces de 1 franc qu'il s'en trouve en somme sur tout le levier.

Il est quelquefois utile de représenter par une courbe une succession d'observations; la vue seule de cette ligne peut indiquer s'il existe une loi qui lie entre eux des nombres que l'on jugeait absolument indépendants les uns des autres. J'aurai l'occasion d'en citer plusieurs exemples curieux à Votre Altesse; il en est un surtout auquel j'attache la plus grande importance; il se rapporte à la théorie de l'homme, et pourrait en quelque sorte servir de base à cette théorie, considérée sous le point de vue scientifique. Toutefois, malgré mon désir de faire diversion à la discussion un peu abstraite qui nous occupe depuis quelque temps, je ne voudrais pas la terminer sans ajouter quelques mots sur la manière de mesurer le degré de précision d'une série d'observations. Ce sera le sujet de ma prochaine lettre, que je promets de rendre aussi courte que possible.

LETTRE XVIII.

Des moyennes proprement dites. Échelle de précision. Erreur probable. Module de précision.

Je disais, en terminant ma lettre précédente, que nous avons dès à présent un moyen de mesurer le degré de précision d'une série d'observations. J'ajouterai même qu'il est possible d'assigner les degrés relatifs de précision de plusieurs séries d'observations différentes. Ainsi, deux personnes ont mesuré successivement 1000 fois de suite la hauteur d'un même édifice, et l'on voudrait savoir quels sont les degrés de confiance qu'on peut attacher à leurs résultats.

Si ces deux observateurs n'ont pas de tendance à observer trop haut ou trop bas, et si leurs erreurs ne sont qu'accidentelles, Votre Altesse sait déjà que les deux séries d'observations pourront être représentées par deux courbes d'une forme très-régulière.

J'ai fait remarquer, comme un résultat de la théorie, qu'en supposant les observations *également* bien faites, et également nombreuses, les deux courbes qui représentent leur succession doivent pouvoir se superposer; et que, pour

des observations inégalement nombreuses, l'une des courbes est plus resserrée que l'autre. Le resserrement vers l'axe se fait proportionnellement à la racine carrée du nombre des observations.

J'ajouterai maintenant, et c'est le principal objet de cette lettre, qu'en supposant les observations également nombreuses dans chaque série, mais *inégalement* bien faites, l'une des courbes sera plus resserrée que l'autre. *Le resserrement vers l'axe se fait proportionnellement au degré de précision des observateurs, et donne la mesure de cette précision.*

Notre but doit donc être de rechercher les moyens d'apprécier le degré de resserrement de la courbe. J'ai calculé une table à cet effet, et je la nommerai *échelle de précision.* Je la déduis sans peine, comme Votre Altesse va en juger, de la table de *possibilité.*

Je prends d'abord le premier nombre de cette dernière table, qui devient aussi le premier nombre de la table de précision ; j'ajoute ensuite le second nombre de la table de possibilité, puis, à la somme j'ajoute le troisième nombre de la table de possibilité; et je continue à additionner successivement de cette manière tous les nombres contenus dans ma première table, en reportant les sommes dans ma table nouvelle.

En procédant ainsi par addition jusqu'à la fin de la table, je n'obtiens que les probabilités d'une moitié de tous les tirages possibles, de ceux où les boules blanches sont inférieures en nombre à 500. Il faudrait doubler les sommes,

pour obtenir les probabilités des tirages de l'autre catégorie.

Quelques exemples feront mieux comprendre ce qui précède.

La probabilité de prendre plus de 480 et moins de 519 boules blanches, se compose de la somme des probabilités de prendre 481, 482, 483, 484.... 518 boules blanches, ce qui donnerait le double de 0,397172, ou bien environ 0,8. C'est la probabilité qu'on ne s'écarte pas de la moyenne, ni en plus ni moins, de 0,020 de l'étendue des limites entre lesquelles les combinaisons peuvent varier. Dans la figure qui représente la courbe de possibilité, cette probabilité se trouve représentée par la surface *fe f'e'* des 40 rectangles contigus, construits sur *ind* symétriquement des deux côtés de *ab*.

La probabilité qu'on ne s'écarte pas de la moyenne, ni en plus ni en moins, de 0,01 de l'étendue des limites, est le double de 0,236548, ou un demi à peu près. On peut donc parier 1 contre 1 qu'un pareil écart n'aura pas lieu; cet écart de 0,01 est employé très-fréquemment; il a reçu le nom d'*erreur probable;* il sert à mesurer le degré de resserrement de la courbe de possibilité, et il devient par suite le module de la précision.

Je reprends maintenant l'exemple mentionné au commencement de cette lettre, et je suppose deux personnes qui, avec une adresse différente, ont mesuré chacune 1000 fois la hauteur d'un même édifice. Les deux courbes qui représenteront les observations, seront inégalement resserrées autour de la moyenne. Voyons comment il sera possible

d'apprécier le degré de resserrement qui servira de mesure à la précision.

Je commencerai par grouper les deux séries d'observations, en procédant par différences de 1 centimètre; les groupes les plus forts seront ceux qui approcheront le plus de la moyenne, comme nous l'avons déjà suffisamment vu. Je fais alors la somme des observations contenues dans chaque groupe, à partir de la moyenne dans les deux sens, et j'arrête l'addition quand la somme vaut $\frac{1}{2}$. Je note avec soin jusqu'où j'ai dû m'écarter de la moyenne pour arriver à former cette somme. Je supposerai que ce soit aux distances de + e centimètres et — e centimètres *. Ce sont ces termes que l'on nomme les limites de *l'erreur probable;* il y a autant d'observations entre ces limites qu'au delà; il y a donc 1 contre 1 à parier que le même observateur, s'il recommençait son travail, ferait des erreurs qui seraient dans ces limites. C'est la grandeur de l'erreur probable qui nous servira désormais de *module de précision.*

Supposons qu'on opère de la même manière pour la seconde série d'observations, et que l'on trouve pour limites de l'erreur probable + s et — s centimètres; on pourra dire que les précisions relatives sont comme e est à s.

Dans l'exemple précédent, je me suis passé de l'échelle de précision, parce que j'ai supposé qu'en additionnant les groupes d'observations qui s'écartent le moins de la

* Le signe — indique moins, ainsi lisez *plus 6 centimètres et moins 6 centimètres*

moyenne, j'ai obtenu une somme formant exactement $\frac{1}{2}$; mais cela n'arrive que très-rarement; et, dans le plus grand nombre de cas, il faudra recourir à l'échelle de précision. Un exemple présenté avec quelques détails ferait facilement comprendre la marche à suivre; mais je n'ai point oublié que j'ai promis d'être court. Je renvoie donc cet exemple à une autre lettre, dont Votre Altesse pourrait passer la lecture, si elle avait hâte de parvenir aux applications que je me propose de faire de la théorie des moyennes à la connaissance de l'homme.

LETTRE XIX.

Exemple de l'emploi de la théorie des moyennes emprunté à l'astronomie.

L'exemple que je vais présenter est emprunté à l'une des sciences qui procèdent avec le plus de précision dans leurs recherches. L'astronomie fait un usage très-fréquent des moyennes. L'excellence des instruments et la sûreté des méthodes qu'elle emploie, permettent de croire qu'elle ne le cède, sous le rapport de l'exactitude, à aucune autre science, et que, par conséquent, les variations des nombres autour de la moyenne se trouvent toujours resserrées dans des limites très-étroites.

Un observateur peut assigner la position d'un astre sans avoir à craindre des erreurs qui s'élèvent à plus de trois à quatre secondes en arc, c'est-à-dire que la distance dont il peut se tromper équivaut, au plus, à la largeur de la petite bande du ciel que nous cacherait un fil, tendu à plusieurs pieds de distance devant nos yeux. Cependant un grand nombre de causes peuvent donner naissance à cette erreur, et nous nous plaçons ici dans l'hypothèse la plus défavorable; nous supposons qu'elles tendent toutes, dans le même sens, à donner une valeur soit trop grande soit trop

petite. Ainsi, quelque précis que soit l'instrument, il n'est point parfait dans toutes ses parties; quelles que soient l'adresse et l'expérience de l'observateur, son coup d'œil n'est pas infaillible; l'air peut être dans des circonstances plus ou moins défavorables : nous ne voyons les astres que du fond de l'atmosphère dans laquelle nous sommes plongés; et, à cause des réfractions, ils ne sont réellement pas dans les lieux où nous les apercevons; la science, il est vrai, nous a donné les moyens d'apprécier ces déplacements et de les corriger, mais d'une manière d'autant moins précise que nous approchons davantage de l'horizon. Malgré ces causes d'erreur, et bien d'autres encore qu'il est superflu d'énumérer ici, un astronome exercé, en faisant usage d'un bon instrument, peut, comme nous l'avons dit, fixer par une seule observation la position d'un astre à trois ou quatre secondes près, et alors nous admettons le concours des circonstances les plus défavorables, celles où toutes les causes d'erreur porteraient dans le même sens. Rarement on aura à craindre de pareils écarts, mais rarement aussi on obtiendra exactement le nombre qu'il fallait déterminer.

Je crois superflu de prévenir que, dans l'exemple qui va nous occuper, je continue à admettre que les chances de faire des erreurs en plus sont exactement les mêmes que celles d'en faire en moins. Les observations dont je ferai usage, sont tirées des publications de l'observatoire royal de Greenwich; elles concernent les déterminations en temps de l'*ascension droite* de la polaire; et par ces mots ascension

droite, il faut entendre la distance d'un astre au point équinoxial, mesurée le long de l'équateur céleste. J'ai employé à cet effet les observations de la polaire obtenues pendant les quatre années 1836 à 1839 inclusivement. Ces observations ont subi les différentes corrections pour la nutation, la précession, etc., et ont été calculées pour une même époque, en sorte qu'elles ne diffèrent plus entre elles que par les effets des petites erreurs accidentelles.

La première colonne du tableau qui va suivre, indique de combien les observations s'écartent de la moyenne en plus et en moins. Afin de pouvoir grouper les observations, j'ai marqué $0^s,5$ pour la différence en ascension droite, dès que les écarts de la moyenne étaient compris entre les limites $0^s,25$ et $0^s,75$. De même les différences qui tombaient entre $0^s,75$ et $1^s,25$, ont été réunies comme formant les écarts d'une seconde, et ainsi de suite. Quant aux observations qui ne s'écartaient pas de la moyenne au delà de $0^s,25$, soit en plus, soit en moins, elles ont été considérées comme égales à la moyenne.

Remarquons d'abord que les différents groupes, donnés dans la seconde colonne, sont à peu près tels qu'ils doivent l'être d'après la théorie, c'est-à-dire que celui qui renferme le plus d'observations se trouve à la moyenne; les deux groupes les plus forts ensuite, sont ceux qui tombent près de la moyenne et qui correspondent aux deux écarts $+ 0^s,5$ et $- 0^s,5$. Puis les groupes continuent à décroître en s'éloignant de la moyenne.

Le nombre des observations est de 487. Or, si l'on prend les trois plus grands groupes renfermant 82, 73 et 72 observations, en tout 227 observations, on aura un peu moins de la moitié de la somme 487, et, par suite, comme Votre Altesse a pu le voir dans ma lettre précédente, l'erreur probable sera un peu plus grande que $0^s,5$. Je vais chercher à donner plus de précision à ces différents résultats.

Je substituerai d'abord aux nombres absolus des observations, écrits dans la seconde colonne du tableau suivant, les nombres relatifs, comme si on avait fait 1000 observations, de manière que chaque nombre de la troisième colonne représente, d'après l'expérience, le nombre des chances sur 1000, ou la probabilité qu'a respectivement en sa faveur chaque écart qui lui correspond horizontalement dans la première colonne. Ainsi 0,148 est la probabilité, indiquée d'après les observations, pour un écart de la moyenne égal à $0^s,5$, si l'on continuait à observer avec le même instrument et dans les mêmes circonstances.

La troisième colonne présenterait donc, si l'expérience avait été suffisamment prolongée, une véritable échelle de précision applicable aux observations qu'on pourrait faire ultérieurement à Greenwich avec les mêmes moyens d'observations. A l'aide de cette échelle, j'ai calculé ensuite l'échelle de précision contenue dans la quatrième colonne.

DIFFÉRENCE en ascension droite par écarts à la moyenne.	NOMBRE des observations		POURCENTAGE des écarts d'après l'observ.	RANG des nombres précédents dans l'échelle de précision.
	ABSOLU.	RELATIF.		
— 3s,5	1	2	500	
— 3,0	6	12	498	45,5
— 2s,5	12	25	486	35,0
— 2,0	21	43	461	28,0
— 1,5	36	74	418	22,0
— 1,0	61	126	344	16,6
— 0,5	73	150	218	9,5
			68	2,6
MOYENNE.	82	168	100	4,0
+ 0,5	72	148	248	10,5
+ 1,0	63	129	377	18,5
+ 1,5	38	78	455	27,0
+ 2,0	16	33	488	35,5
+ 2,5	5	10	498	45,5
+ 3,0	1	2	500	
	487	1000		

La cinquième colonne a été formée au moyen de la quatrième et de la manière suivante : de 500, écrit au bas de cette dernière colonne, j'ai retranché le nombre 2 placé en regard dans la troisième colonne : puis, du reste 498, j'ai retranché le nombre 10, placé également en regard dans la troisième colonne; et ainsi de suite, en remontant jusqu'au reste 100. Ce reste exprime une partie des observations qui entrent dans le groupe de la moyenne; il devrait, à la rigueur, être égal à la moitié de 168, parce que le groupe de la moyenne contient les observations dont l'erreur ne dé-

passe pas $0^{s},25$ en plus ni en moins, et que les deux portions du groupe devraient être théoriquement égales. Nous reconnaissons du reste que la moyenne générale n'a pas été tout à fait bien calculée, et qu'elle devrait tomber un peu plus bas. J'ai fait ensuite un calcul analogue au précédent, en commençant par l'autre extrémité de la colonne. Cette fois, je retombe sur le reste 68, qui, ajouté au reste 100 obtenu précédemment, reproduit 168.

Quand la quatrième colonne a été formée de cette manière, elle donne, d'après l'expérience, les diverses probabilités que les erreurs auxquelles on est exposé, ne s'écarteront pas de la moyenne au delà des limites qui sont indiquées dans la première colonne. Ainsi l'on a 418 chances sur 1000, ou 0,418 pour la probabilité qu'on ne s'écartera pas de la moyenne de $1^{s},5$ en moins; et, de même, 0,455 pour la probabilité qu'on ne s'écartera pas de la moyenne de $1^{s},5$ en plus.

A la rigueur, ces deux probabilités 0,418 et 0,455 devraient être égales. Mais on conçoit que les probabilités déduites à *posteriori* sont d'autant moins exactes, que les observations d'où on les a déduites sont en plus petit nombre.

Je supposerai désormais que, lorsqu'on a une série d'observations, on commence toujours par calculer une table analogue à celle qui précède; on aura ainsi, dans les colonnes troisième et quatrième, des échelles de possibilité et de précision relatives aux observations dont on s'occupe.

La dernière colonne du tableau donne un premier exemple de l'emploi que l'on peut faire des nombres contenus dans

la colonne précédente. Ces nombres ont été comparés successivement à ceux de notre table générale de précision, pour reconnaître la place qu'ils y occuperaient. Ainsi la probabilité 0,418, relative à l'écart — 1°5, se trouve à la 22e place. Ce sont ces derniers nombres qui figurent dans la cinquième colonne. C'est ici que l'on peut voir si les observations marchent avec régularité, et si elles s'écartent de la moyenne conformément à ce qu'indique la théorie. Mathématiquement, les rangs devraient être à peu près également espacés, excepté pour les termes extrêmes. Or, c'est ce que nous reconnaissons; car on peut considérer la distance d'un terme au suivant comme représentée assez exactement par le nombre 6,5.

Si nous prenons en effet cette quantité pour différence de deux progressions arithmétiques, l'une croissante et l'autre décroissante, ayant pour premier terme 2,5, nous aurons une série de nombres qui reproduiront à peu près exactement ceux contenus dans la dernière colonne du tableau précédent, excepté pour les termes extrêmes. C'est ce que l'on pourra voir dans le tableau qui suit, dont la deuxième colonne renferme les nombres calculés de cette manière.

La troisième colonne se compose des nombres tirés de notre table générale de précision, dans les rangs indiqués par les nombres de la deuxième colonne. Elle fait connaître les probabilités calculées des différents écarts.

DIFFÉRENCES en ascension droite par RAPP. À LA MOY.	RANG d'après le calcul.	PROBABILITÉ des écarts d'après le CALCUL.	NOMBRE des observ. de chaq. groupe d'après LE CALCUL.	NOMBRE des observ. de chaq. groupe d'après L'EXPÉRIENCE.
— 3s,5	»	»	4	2
— 3,0	41,5	0,496	10	12
— 2,5	35,0	0,486	22	25
— 2,0	28,5	0,464	46	43
— 1,5	22,0	0,418	82	74
— 1,0	15,5	0,336	121	126
— 0,5	9,0	0,215	152	150
»	2,5	0,063	»	»
MOYENNE.	4,0	0,100	163	168
+ 0,5	10,5	0,247	147	148
+ 1,0	17,0	0,359	112	129
+ 1,5	25,5	0,451	72	78
+ 2,0	30,0	0,471	40	33
+ 2,5	36,5	0,490	19	10
+ 3,0	»	»	10	2
			1000	1000

La deuxième et la troisième colonne ne font que reproduire, en quelque sorte, les quatrième et cinquième colonnes du tableau précédent; seulement j'ai altéré un peu les nombres observés, pour les assujettir, d'après le calcul, à suivre la loi de continuité indiquée par la théorie. La troisième colonne nous montre que 496 de ces nombres sont moindres que la moyenne de trois secondes; il y en avait donc quatre plus petits encore: c'est ce qu'indique le chiffre inscrit au haut de la quatrième colonne, en regard de l'écart 3s,5; 486 observations ont donné des nombres moindres que la moyenne de 2s,5. La différence entre 496 et 486 représente le groupe

des observations qui s'écartent de la moyenne de — 3 secondes; cette différence 10 est aussi inscrite dans la quatrième colonne. On obtient de la même manière tous les autres nombres de la quatrième colonne, en faisant la différence de deux nombres consécutifs de la troisième.

Cette troisième colonne, dans laquelle j'ai établi, d'après la table de précision, la continuité qu'exige la théorie, présente des nombres qui diffèrent très-peu de ceux qu'a donnés réellement l'expérience. Pour mettre à même de juger de la similitude, j'ai reproduit, dans une dernière colonne, les nombres observés. Votre Altesse conviendra qu'il serait assez difficile que le calcul et l'expérience pussent marcher mieux d'accord. Cet accord prouve en faveur de l'adresse des observateurs anglais.

Qu'il me soit permis d'ajouter encore une dernière remarque: nous venons de voir qu'une différence de $0^s,5$ sur l'ascension droite de la polaire correspond, dans la table de précision, à six rangs et demi : proportionnellement 21 rangs doivent correspondre à $1^s,61$. Or, ces vingt et un rangs constituent l'erreur probable; il y a donc 1 contre 1 à parier que les écarts de la moyenne ne dépasseront pas la moitié de $1^s,61$ ou $0^s,8$. *L'erreur probable* est donc ici de huit dixièmes de seconde en temps.

LETTRE XX.

Reconnaître si une moyenne arithmétique est véritablement moyenne. Type de la taille humaine.

Le gladiateur est sans contredit l'un des plus beaux ouvrages de la sculpture ancienne. C'est avec raison que les artistes ont étudié ses formes nobles et dégagées, et qu'ils ont souvent mesuré les principales dimensions de la tête et du corps, pour en saisir les rapports et l'harmonie.

La mesure d'une statue n'est pas une opération aussi facile qu'on le croirait au premier abord, surtout si l'on désire l'obtenir avec une grande précision. En mesurant dix fois de suite la circonférence de la poitrine, on n'est pas sûr de trouver deux résultats identiquement les mêmes. Il arrive presque toujours que les valeurs obtenues sont plus ou moins éloignées de celle que l'on cherche; et je suppose même les circonstances les plus favorables, celles où l'on n'aurait aucune tendance à prendre des mesures trop grandes ou trop petites.

Si l'on avait le courage de recommencer mille fois, on finirait par avoir une série de nombres qui différeraient entre eux selon le degré de précision qu'on aurait mis à les recueillir. La moyenne de tous ces nombres s'écarterait cer-

tainement très-peu de la véritable valeur. De plus, en classant toutes les mesures par ordre de grandeur, on ne serait pas médiocrement étonné de voir les groupes se succéder avec la régularité la plus grande. Les mesures qui s'écartent le moins de la moyenne générale composeraient le groupe le plus considérable; et les autres groupes seraient d'autant plus petits, qu'ils contiendraient des mesures plus en désaccord avec cette même moyenne. Si l'on figurait la succession des groupes par une ligne, Votre Altesse a déjà deviné que cette ligne serait la courbe de possibilité; ce résultat, en effet, était à prévoir. En sorte que la maladresse, ou le hasard, si nous aimons mieux ce mot pour couvrir notre amour-propre, procède avec une régularité qu'on ne serait guère tenté de lui attribuer.

Je suppose maintenant qu'on réunisse les cinq cents mesures qui s'écartent le moins de la moyenne; la demi-différence qui se trouvera entre la plus grande et la plus petite de toutes ces mesures, sera le module de la précision ou l'*erreur probable*. Il pourrait se faire que, dans les circonstances actuelles, cette erreur probable ne fût que d'un millimètre; en sorte que, sur les mille mesures, cinq cents seraient en erreur de moins d'un millimètre, et cinq cents autres seraient en erreur de plus d'un millimètre. On aurait ainsi 1 contre 1 à parier qu'en prenant une nouvelle mesure, on ne s'écarterait pas d'un millimètre de la moyenne de toutes les mesures, laquelle peut être considérée comme la véritable circonférence qu'on voulait apprécier.

Si l'on avait à mesurer la poitrine d'une personne vivante au lieu de celle d'une statue, les chances d'erreur seraient beaucoup plus nombreuses; et je doute fort qu'après mille mesures, on trouvât encore une erreur probable de 1 millimètre. Le seul acte de la respiration, qui fait varier à chaque instant la forme et les dimensions de la poitrine, ajouterait une puissante cause d'erreur à toutes celles qu'on rencontre déjà en opérant sur une statue parfaitement immobile. Malgré ce désavantage, les mille mesures groupées par rangs de grandeur procèderaient cependant encore d'une manière très-régulière. La ligne qui les représenterait, serait toujours la courbe de possibilité, mais dilatée dans le sens horizontal, proportionnellement à l'erreur probable.

Modifions encore notre hypothèse, et supposons qu'on ait employé un millier de statuaires pour copier le gladiateur avec tout le soin imaginable. Votre Altesse ne pense certainement pas que les mille copies qui auront été faites, reproduiront chacune exactement le modèle, et qu'en les mesurant successivement, les mille mesures que j'obtiendrais seraient aussi concordantes que si je les avais prises toutes sur la statue du gladiateur même. Aux premières chances d'erreur viendraient se joindre les inexactitudes des copistes; en sorte que l'erreur probable serait peut-être très-grande. Malgré cela, si les copistes n'ont pas travaillé avec des idées préconçues, en exagérant ou en diminuant certaines proportions d'après des préjugés d'école, et si leurs inexactitudes ne sont qu'accidentelles, les mille mesures, groupées par ordre

de grandeur, présenteront encore une régularité remarquable et se succèderont dans l'ordre que leur assigne la loi de possibilité.

Je vois sourire Votre Altesse; elle me dira sans doute que de pareilles assertions ne me compromettront pas, attendu qu'on ne sera pas disposé à tenter l'expérience. Et pourquoi pas? Je vais peut-être bien l'étonner, en disant que l'expérience est toute faite. Oui vraiment, on a mesuré plus d'un millier de copies d'une statue que je n'assurerai pas être celle du gladiateur, mais qui, en tout cas, s'en éloigne peu: ces copies étaient même vivantes, en sorte que les mesures ont été prises avec toutes les chances d'erreur possible: j'ajouterai, de plus, que les copies ont pu se déformer par une foule de causes accidentelles. On doit donc s'attendre, ici, à trouver une erreur probable très-sensible.

J'en viens au fait. On trouve, dans le 13e volume du journal médical d'Édimbourg, les résultats de 5738 mesures prises sur les poitrines des soldats des différents régiments écossais. Ces mesures sont exprimées en pouces anglais et groupées par ordre de grandeur, en procédant par différences de 1 pouce. La plus petite mesure est de 33 pouces environ, et la plus grande de 48; la moyenne de toutes les mesures donne un peu plus de 40 pouces pour circonférence de la poitrine d'un soldat écossais : c'est aussi le nombre qui correspond au plus grand groupe de mesures; et, comme la théorie l'indique, les autres groupes diminuent de grandeur à mesure qu'ils s'éloignent de celui-ci; l'écart probable est de 1p,312 ou

de $33^{mm},34$. Je prie Votre Altesse de ne pas perdre de vue cette valeur.

Je demande maintenant si ce serait exagérer que de parier 1 contre 1 qu'une personne peu exercée à prendre des mesures sur le corps humain, va se tromper de 33 millimètres environ, en mesurant une poitrine de plus d'un mètre de circonférence? Eh bien, en admettant cette erreur probable, 5738 mesures prises sur une même personne ne se grouperaient certainement pas avec plus de régularité, quant à l'ordre de grandeur, que les 5738 mesures prises sur les soldats écossais. Et si l'on nous donnait les deux séries de mesures sans les avoir désignées d'une manière particulière, nous serions très-embarrassés de dire quelle série a été prise sur 5738 soldats différents, et quelle série a été obtenue sur une seule et même personne, avec moins d'habitude et des moyens d'appréciation plus grossiers.

L'exemple que je viens de citer mérite, je crois, toute notre attention : il nous montre que les choses se passent absolument comme si les poitrines qui ont été mesurées avaient été modelées sur un même type, sur un même individu, idéal si l'on veut, mais dont nous pouvons saisir les proportions par une expérience suffisamment prolongée. Si telle n'était pas la loi de la nature, les mesures ne se grouperaient pas, malgré leurs défectuosités, avec l'étonnante symétrie que leur assigne la loi de possibilité.

Parmi les admirables lois que la nature attache à la conservation de l'espèce, je crois pouvoir mettre en première

ligne celle de la conservation du type. Dans mon travail sur la *physique sociale*, j'avais déjà cherché à déterminer ce type, par la connaissance de l'homme moyen. Mais, si je ne me fais illusion, ce que l'expérience et le raisonnement m'avaient fait reconnaître, prend ici le caractère d'une vérité mathématique.

Le type humain pour des hommes d'une même race et d'un même âge, se trouve si bien établi, que les écarts entre les résultats de l'observation et ceux du calcul, malgré les nombreuses causes accidentelles qui peuvent les provoquer et les exagérer, ne dépassent guère ceux que des maladresses pourraient produire dans une série de mesures prises sur un même individu.

Si l'on m'objecte que l'on rejette des régiments les hommes qui sont déformés par un excès d'embonpoint ou de maigreur, je répondrai qu'en les admettant tous, on ne ferait qu'élargir les limites de l'erreur probable, sans altérer la loi qui préside à l'assemblage des nombres. Je pourrais citer des exemples à l'appui de cette assertion, et rapporter les résultats des mesures que j'ai prises moi-même sur un grand nombre d'individus, sans choix préalable ; mais j'ai cru ne devoir employer, autant que possible, que des nombres réunis par des mains étrangères.

S'il n'existait aucune loi qui présidât au développement de l'homme, si tout se faisait au hasard, je demanderais à mon tour combien on n'aurait pas à parier contre un, que 5738 mesures prises sur autant de poitrines, se rangeraient dans un ordre tout différent de celui qui est déterminé par la loi de possibilité.

LETTRE XXI.

Chaque race d'hommes a son type particulier. Applications de cette théorie.

Depuis que j'ai écrit ma dernière lettre, j'ai songé qu'on pouvait faire une objection assez spécieuse à ce qu'elle contient. Cette objection n'aura certainement pas échappé à Votre Altesse, habituée comme elle l'est à voir des régiments et à tenir compte de la taille des soldats. On me demandera ce que deviendrait ma prétendue régularité dans la manière dont procèdent les mesures, si j'avais à opérer sur un régiment de cuirassiers, par exemple, ne contenant que des hommes très-grands et très-vigoureux, et sur un régiment de chasseurs, composé d'hommes beaucoup plus petits. En mêlant toutes les mesures et en les groupant par ordre de grandeur, le groupe le plus nombreux ne correspondrait certainement pas à la moyenne.

Ma réponse sera facile : l'exemple que l'on prend répondrait à celui où, parmi tous les hommes mesurés dans une nation, on choisirait ceux qui forment deux groupes quelconques, plus ou moins éloignés de la taille moyenne. On pourrait, dans ce cas, prendre une moyenne arithmétique,

mais on n'aurait pas une véritable moyenne, qui ne peut dépendre que de l'ensemble de toutes les observations. Quand on veut une vérification de la loi que j'ai essayé d'établir, il ne faut point choisir, il faut prendre tous les hommes d'une nation tels qu'ils sont. Ainsi, ne nous arrêtons pas à considérer tel ou tel régiment, nous n'aurions qu'un groupe d'hommes d'une taille déterminée parmi tous les groupes qu'on aurait pu faire, en ayant égard aux grandeurs. Si la loi s'est vérifiée sur les soldats écossais, c'est que les mesures avaient été prises sur les différents régiments, et qu'on opérait d'ailleurs sur les circonférences des poitrines, élément où l'influence du choix domine moins que sur les tailles. Il faut avoir soin aussi, pour rendre toutes les chances égales, de ne soumettre à de pareilles épreuves que des hommes d'un même âge.

Or, cette expérience j'ai pu la faire. On mesure annuellement les conscrits français, et M. d'Hargenvilliers a fait connaître comment 100 000 conscrits sont distribués par ordre de grandeur, quand on les groupe par différences de 27 millimètres. En adoptant ses nombres, et en les comparant à ceux de notre table de possibilité, j'ai trouvé qu'ils procèdent dans l'ordre le plus régulier et se rangent symétriquement des deux côtés de la moyenne. En d'autres termes, les nombres se groupent avec le même ordre que si l'on avait mesuré un même individu 100 000 fois de suite, avec une erreur probable de 49 millimètres.

Il faudrait sans doute mesurer bien maladroitement pour

qu'il y eût à parier 1 contre 1, qu'on se trompera de 49 millimètres, quand il s'agit d'apprécier une hauteur de 1m,640 environ. Cependant, je le demande à Votre Altesse, ceux qui, dans les conseils de recrutement, sont chargés de mesurer les conscrits français, pourraient-ils mesurer la taille du gladiateur avec une erreur probable moindre que 49 millimètres? Pour moi, j'en doute. Dans l'attitude de combattant qu'a la statue, il devient très-difficile d'en bien apprécier la grandeur; il faudrait pour arriver à quelque précision, que cette opération fût faite par une personne au courant de l'anatomie. Chaque partie doit être mesurée séparément, et on commettrait de grandes erreurs si l'on ne pouvait pas se rendre compte de la manière dont les membres sont agencés. Un anatomiste, doué de dextérité et habitué à ces sortes d'appréciations, pourra donner la hauteur du gladiateur, avec presque autant de chances d'exactitude que si la statue était droite. Mais il n'en sera pas de même d'un autre homme, et je crois ne pas exagérer en disant que l'erreur probable s'élèverait dans certaines circonstances à 49 millimètres.

Ainsi, rien qu'en courbant le corps humain, fût-ce même dans une statue, on expose celui qui doit en mesurer la hauteur à des erreurs assez grandes pour que les nombres qui seront obtenus, diffèrent tout autant entre eux que les nombres qu'on obtiendrait en mesurant tous les hommes d'un même âge, pris dans une même nation. La différence que la nature met entre les tailles des hommes n'est pas plus grande que celle que produirait l'inexpérience dans les

mesures prises sur un même homme ayant une attitude plus ou moins courbée.

Tout se passe donc comme s'il existait un homme type, dont tous les autres hommes s'écartent plus ou moins. La nature a mis sous nos yeux des exemples animés de ce que nous montre la théorie : chaque peuple présente sa moyenne et les différents écarts de cette moyenne en nombres calculables *à priori*.

Cette moyenne varie d'un peuple à l'autre, et quelquefois même dans les limites d'un seul pays, où deux peuples d'origines différentes peuvent se trouver confondus.

Que demain l'on peuple une île déserte, en y plaçant 1000 hommes de la race la plus grande, des patagons par exemple, ayant tous $1^m,80$ de hauteur, et 1000 lapons n'ayant que $1^m,40$ de hauteur : la taille moyenne dans cette île sera de $1^m,60$, et cependant pas un homme n'aura cette taille. En groupant les tailles par ordre de grandeur, nous ne pourrons former que deux groupes, et la loi de possibilité sera complétement en défaut, du moins en apparence. Mais on voit d'abord que le désaccord ne provient ici que de ce qu'on mêle des choses hétérogènes, des hommes de races différentes, et qui ont des lois différentes de développement.

Cependant ne rejetons pas cet exemple, il peut nous être utile. Supposons qu'au lieu de choisir 1000 patagons ayant tous la même taille, on en prenne 1000 tels qu'ils se présentent, ayant les uns moins, les autres plus de $1^m,80$;

quand on les groupera par ordre de grandeur, leur arrangement, nous le savons déjà, sera déterminé par la loi de possibilité. Si l'on en fait autant pour les 1000 lapons, il peut arriver qu'un certain nombre de ces derniers aient la taille des patagons les plus petits, et alors les deux lignes qui figurent leur arrangement empièteront l'une sur l'autre. Cet empiétement sera d'autant plus grand, que les deux races d'hommes qu'on a mêlées, diffèreront moins en hauteur et qu'on aura moins choisi les hommes. Si l'on avait à mesurer les tailles chez un peuple semblable, on pourrait ignorer qu'un pareil mélange a eu lieu, mais l'expérience le ferait connaître. La ligne qui représenterait les mesures aurait deux sommets, qui annonceraient deux races différentes ayant des tailles moyennes inégales. La loi de possibilité a donc ce nouvel avantage qu'elle aide à résoudre un problème très-intéressant sous le rapport anthropologique.

Le cas dont je viens de parler aurait encore lieu si l'on ne faisait aucune distinction de sexes, en mesurant les personnes âgées de 30 ans dans une même nation. Les hommes auraient une courbe des tailles différente de celle des femmes, et la courbe commune aux deux sexes aurait deux sommets. Le calcul pourrait aider à séparer ce qui appartient à l'un et à l'autre sexe.

Puisque j'ai commencé à citer les avantages qu'on peut retirer de l'emploi de la table de possibilité, je vais en donner un nouvel exemple. Je supposerai qu'on ne connaisse de toute une série d'observations que quelques groupes seule-

ment, et qu'on demande de déterminer les autres groupes.

Je reprendrai l'exemple déjà cité des conscrits français. M. d'Hargenvilliers, en faisant connaître comment 100 000 hommes se sont distribués par ordre de grandeur et par groupes différant entre eux de 27 millimètres, n'a fait qu'indiquer le total des conscrits ayant moins de 1m,570, et celui des conscrits ayant plus de 1m,750; il s'en trouvait 28 630 de la première catégorie, et 2 490 seulement de la seconde. Au moyen des sept groupes intermédiaires qu'il a donnés, il m'a été possible de reconnaître comment il fallait rétablir les huit groupes d'hommes compris dans le cas de réforme pour défaut de taille, et les sept groupes d'hommes ayant plus de 1m,750.

J'ai reconnu, de plus, que l'écart probable était de 0m,040 ou d'un demi-décimètre environ. Or, si l'on observe que la taille moyenne était de 1m,62, on reconnaîtra que l'écart probable forme $\frac{1}{33}$ de la quantité à mesurer. Dans l'exemple qui se rapporte à la mesure des poitrines des troupes écossaises, j'ai trouvé, pour écart probable, 33 millimètres environ sur une circonférence de 1m,016. L'écart probable forme, ici, $\frac{1}{30}$ de la quantité mesurée. On peut en conclure que, relativement aux grandeurs, les mesures avaient à peu près le même degré de précision des deux parts. La loi de continuité des nombres nous permet de reconnaître encore que deux individus seulement sur 100 000 ont, en France, plus de 1m,921, et que quatre tombent au-dessous de la taille de 1m,297.

Cette même loi de continuité nous permet de reconnaître un fait plus remarquable ; on pouvait le soupçonner, mais nous en trouvons ici la preuve : c'est que le nombre des réformes pour défaut de taille est exagéré de beaucoup. Non-seulement nous en avons la preuve, mais nous pouvons déterminer le montant de la fraude. Les documents officiels comptent 23620 hommes, sur cent mille, qui tombent au-dessous de $1^{m},570$, et le calcul n'en donne que 26345. N'est-il pas à présumer que les 2275 hommes qui font la différence de ces nombres, ont été réformés frauduleusement? On le comprendra d'autant mieux, qu'il est très-facile de diminuer la taille de deux à trois centimètres, quand on y a un intérêt aussi majeur que celui de la réforme. D'une autre part, les autorités sont indulgentes, lorsqu'il s'agit de substituer à des hommes très-petits, d'autres hommes qui ont une taille plus avantageuse. Cette conjecture prend un nouveau degré de consistance, si l'on observe que 2275 hommes manquent dans les deux groupes qui arrivent immédiatement au-dessus de la limite $1^{m},570$.

La considération de l'erreur probable a cet avantage, qu'elle permet d'établir des comparaisons, même entre des séries d'observations qui ne seraient pas homogènes. Si nous soumettions au calcul l'exemple cité dans ma XIIIe lettre, au sujet de la température moyenne du mois de juillet, nous trouverions que l'erreur probable est de $2^{\circ},1$; or, nous avons trouvé aussi, pour l'erreur probable, dans la mesure de l'ascension droite de la polaire, $0^{s},8$; il y a donc égale-

ment à parier 1 contre 1, d'une part, qu'une observation de l'ascension droite de la polaire faite à Greenwich ne sera pas en erreur de 0s,8; et, de l'autre, que la température d'une journée de juillet, à Bruxelles, sera de 19° centigrades, sans qu'on ait à craindre d'écarts plus grands que 2°,1. Il est bien entendu que si les circonstances venaient à varier, que si l'on changeait par exemple de localité, les conditions du pari devraient être changées également, car les erreurs probables ne seraient plus les mêmes.

Quand on a une série d'observations exprimées dans une mesure étrangère, on est quelquefois très en peine de pouvoir y substituer une autre série, en faisant usage d'une mesure mieux connue. Ainsi, les circonférences des poitrines des troupes écossaises étaient exprimées en pouces anglais; mais un français voudra savoir comment ces mesures auraient été groupées, si l'on avait procédé par différences de deux centimètres, par exemple. Un allemand aurait préféré de les grouper, en admettant des différences d'un pouce du Rhin.

Ces nouveaux arrangements peuvent se faire très-facilement au moyen de l'échelle de possibilité. On remarquera en effet que les nombres donnés fournissent tous les moyens de construire la courbe de possibilité. Quand on a cette courbe, il devient ensuite aisé de substituer à une série de perpendiculaires équidistantes qui partagent sa surface en bandes d'égale largeur, une autre série de perpendiculaires également équidistantes, mais plus ou moins séparées

entre elles. En faisant usage de la table de possibilité, on parvient plus facilement encore à son but par le calcul.

Il est un problème qui se présente fréquemment dans les applications de ce genre, c'est le suivant : on a réuni un certain nombre de mesures, et l'on connaît la plus petite et la plus grande, celles qui servent de limites à la série; on demande d'apprécier, d'après ces seules données, comment doivent se grouper toutes les autres observations? Il semblerait au premier abord que ces données sont insuffisantes; il n'en est rien cependant, car nous avons tous les éléments de solution nécessaires. Ainsi, supposons que l'homme le plus grand qu'on ait mesuré en France soit de $2^m,12$ et le plus petit de $1^m,12$ seulement, et que le nombre des hommes sur lesquels ont pu porter les observations soit de 1 000 000; il me sera possible de dire comment ces hommes se trouvent distribués, quant à la taille, que je les divise soit par groupes procédant par différences de 1 centimètre, soit de toute autre manière. Il est évident d'abord que la taille moyenne se placera à égale distance des deux limites, et formera en conséquence leur moyenne arithmétique; cette taille moyenne est de $1^m,62$; et sur le million d'hommes mesurés, 500 000 auraient plus que cette taille, et 500 000 autres auraient moins. Quand on les distribue tous en dix groupes se succédant par différences de 1 décimètre, notre table de précision donne, pour les cinq groupes qui excèdent la moyenne, les valeurs suivantes, placées à 16 rangs de distance.

344335	hommes	ayant de	1m,02	à 1m,72,
478586	id.	id.	id.	à 1m,82,
498814	id.	id.	id.	à 1m,92,
499974	id.	id.	id.	à 2m,02,
499999	id.	id.	id.	à 2m,12.

Ce tableau nous montre que les hommes se classeraient ainsi qu'il suit pour l'ordre des grandeurs.

344335	hommes	ayant	1m,02	plus	10	centimèt.
134251	id.	id.	1m,02	id.	20	id.
20228	id.	id.	1m,02	id.	30	id.
1160	id.	id.	1m,02	id.	40	id.
25	id.	id.	1m,02	id.	50	id.
1	homme	ayant	plus de	2m,12.		

La même distribution aurait lieu pour les cinq groupes au-dessous de la moyenne, de sorte qu'on trouverait

344335	hommes	ayant	1m,02	moins	10	centimèt.
134251	id.	id.	1m,02	id.	20	id.
20228	id.	id.	1m,02	id.	30	id.
1160	id.	id.	1m,02	id.	40	id.
25	id.	id.	1m,02	id.	50	id.
1	homme	ayant	moins de	1m,12.		

LETTRE XXII.

Événements ordinaires, extraordinaires. Monstruosités.

Votre Altesse aura pu se convaincre déjà de l'utilité qu'on peut retirer de la considération des limites et de la moyenne; elle aura vu que toutes nos idées en général, quand elles ont pour but l'appréciation des grandeurs, reposent sur ces trois choses. Souvent nous allons plus loin; et, à notre insu, outre les deux limites extrêmes, nous reconnaissons encore des limites intermédiaires. Ainsi, nous nous sommes servis avec avantage des *limites de l'erreur probable*, qui sont très-resserrées, puisqu'elles ne renferment que la moitié du nombre de toutes les observations; on peut les prendre comme renfermant les cas *ordinaires*. Au delà de ces limites se présentent les cas qui, sans être extraordinaires, donnent lieu à la distinction du *grand* et du *petit* dans le langage vulgaire. On trouve ici de nouvelles limites dont la science ne s'est pas encore occupée, et que l'usage détermine de la manière la plus arbitraire. Au delà de ces secondes limites se présentent les cas *extraordinaires*, qui ont eux-mêmes pour limites l'impossible.

Votre Altesse concevra que ces limites doivent jouer un grand rôle dans notre manière d'envisager les phénomènes relatifs à l'homme et à la société. Les diverses limites ont des probabilités qui leur correspondent : je vais essayer de les fixer en m'écartant le moins possible des idées reçues.

Je remarquerai d'abord qu'on aurait les distinctions suivantes, en appliquant à la taille de l'homme les limites que je viens d'établir :

Limite extraordinaire en plus,
géants;
Limite ordinaire en plus,
hommes grands;
Limite de l'erreur probable en plus,
taille ordinaire;
Limite de l'erreur probable en moins,
hommes petits,
Limite ordinaire en moins;
nains,
Limite extraordinaire en moins.

Je reconnais donc trois espèces de limites, et en cela je ne fais que me conformer aux usages; seulement je cherche à donner des appréciations plus exactes de choses auxquelles chacun, selon son caprice, prête les valeurs les plus arbitraires.

Les limites de l'erreur probable en plus et en moins, correspondent à la probabilité $\frac{1}{2}$; il ne faut pas oublier que le nombre des observations comprises entre ces limites est

proportionnel à cette probabilité, et forme la moitié du nombre total des observations.

Les limites ordinaires peuvent s'étendre de chaque côté de la moyenne jusqu'à la probabilité 0,4999999, en sorte que, sur dix millions de cas, on n'en réputerait que deux pour extraordinaires : l'un en plus, l'autre en moins. En France, par exemple, on regarderait comme géants, les trois ou quatre hommes les plus grands que renferme le royaume; et, comme nains, les trois ou quatre plus petits, en les supposant régulièrement conformés.

Les limites extraordinaires au delà desquelles se trouvent les *monstruosités*, me semblent plus difficiles à fixer. En effet, dans l'échelle de possibilité que nous avons construite, en supposant un nombre de chances très-grand, mais déterminé, si l'on prend les limites un peu éloignées de la moyenne, les probabilités qui y correspondent deviennent tellement petites qu'elles sont inappréciables. Lorsqu'on suppose le nombre des observations infini, on peut porter les écarts à des distances également infinies de la moyenne, et trouver toujours des probabilités qui y correspondent. Cette conception mathématique ne peut évidemment s'accorder avec ce qui est dans la nature.

Il m'a paru que, quand il s'agit de tailles, ce qu'on peut admettre avec le plus de confiance, ce sont des limites qui s'étendraient au delà des plus grandes et des plus petites tailles que l'on a observées parmi les hommes. Or, en ne s'appuyant que sur des documents authentiques, on sait que Frédéric-

le-Grand, roi de Prusse, avait un garde du corps suédois, haut de huit pieds et demi, mesure de Suède, ou de 2m,553. D'une autre part, selon Birch, il aurait existé un individu âgé de 37 ans, et n'ayant que 16 pouces de hauteur ou 0m,433. Bébé, le nain si connu du roi de Pologne, était plus grand.

Si l'on prend, pour moyenne de la taille, 1m,617, le géant du roi de Prusse la surpassait de 0m,936; et le nain cité par Birch, lui était inférieur de 1m,184. Or, quoique cette dernière mesure paraisse exagérée, je l'admettrai comme limite inférieure; et j'admettrai aussi, pour limite supérieure, la moyenne augmentée de ce même écart 1m,184 ou 2m,801 : la taille de l'homme aurait donc pour limites extrêmes 0m,433 et 2m,801; ou bien 16 pouces de France et 8 pieds 7 pouces et demi environ.

Buffon, à qui j'ai emprunté les mesures citées précédemment, pense qu'on doit fixer les limites de la nature actuelle, pour la grandeur du corps humain, depuis deux pieds et demi jusqu'à huit pieds de hauteur; et, quoique cet intervalle soit bien considérable, ajoute-t-il, et que la différence paraisse énorme, elle est cependant plus grande dans quelques espèces d'animaux *.

J'admets, comme Votre Altesse vient de le voir, des limites plus larges encore que celles de Buffon, et je me fonde pour cela sur les observations mêmes rapportées par ce célèbre naturaliste. On aurait donc les limites suivantes, pour la taille humaine :

* *Histoire naturelle de l'homme*, article NAINS.

	mm.
Limite de la taille des *géants*	2,801
Id. des *hommes grands*	2,027
Id. de la *taille ordinaire* en plus	1,668
Taille moyenne.	1,617
Limite de la *taille ordinaire* en moins	1,566
Id. des *hommes petits*.	1,207
Id. des *nains*	0,433

La taille moyenne que j'adopte ici se rapporte à la France.

La moitié des hommes de cette nation, à l'âge de la conscription, se trouvent compris entre les limites $1^m,668$ et $1^m,566$.

Sur 10 000 000 d'hommes, il ne s'en trouve qu'un seul ayant plus de $2^m,027$, et un seul ayant moins de $1^m,207$.

Il faudrait un nombre d'hommes infini, pour arriver aux deux limites $2^m,801$ et $0^m,433$, que j'ai prises pour les plus larges possible; et l'on pourrait regarder comme des *monstruosités* ceux qui tomberaient en dehors de ces limites.

P. S. Depuis que j'ai écrit ce qui précède, j'ai eu l'occasion de diriger mes propres observations sur une miniature du type humain, qui, pendant quelque temps, a occupé l'attention des deux mondes; je veux parler de Charles S. Stratton, qu'on a pompeusement surnommé le général Tom Pouce. J'ai profité de la bonne fortune qui m'était offerte, et j'ai pu mesurer les différentes dimensions du corps du célèbre nain que les États-Unis ont offert à l'admiration de l'Europe. Je dis l'admiration, car je ne pense pas que les différentes classes de la société aient jamais montré un

empressement plus grand à voir un autre homme. Kepler, Pascal, Newton, s'ils pouvaient reparaître sur la scène du monde, ne seraient rien auprès de l'illustre général américain. Il est vrai que le génie, quelque grand qu'il soit, ne se voit pas : on tombe mieux d'accord sur la valeur d'une taille, surtout d'une petite taille qui ne blesse aucun amour-propre. Il y a, pour tout le monde, matière à louer sans restriction.

Cependant je suis confus de devoir l'avouer, Tom Pouce n'a pas répondu à mon attente. J'ai pu céder un instant à l'entraînement général et admirer ce que j'allais nommer le grand homme; mais une inflexible mesure m'a répété jusqu'à trois fois, avec la plus rigoureuse opiniâtreté, que le général avait 70 centimètres de hauteur, et se trouvait par conséquent bien loin encore de ma limite inférieure. Il se place à peu près à égale distance des deux barrières qui comprennent entre elles les nains de différentes tailles.

Votre Altesse remarquera d'ailleurs que ces barrières sont fixées pour les nains adultes, et le général Tom n'a que 14 ans, de l'aveu même de ceux qui le produisent en public. Je rabattrais volontiers la moitié de ces années, si je ne craignais de porter atteinte à sa réputation. Je dois déclarer du reste qu'il est admirablement bien fait dans sa petite taille; j'ai vu rarement de petites mains plus gracieuses, des pieds plus mignons. En rapprochant les différentes mesures que j'ai pu prendre de celles que j'avais réunies pour les enfants des différents âges, j'ai trouvé que Tom Pouce

avait, à l'époque où je l'ai mesuré, à peu près exactement toutes les dimensions d'un enfant de 14 à 15 mois; les bras cependant étaient notablement plus courts. La tête et toutes les extrémités, qui prennent en général un grand développement chez les nains, ne présentaient ici rien d'extraordinaire. Seulement, le nez retroussé, les orbites des yeux fortement dessinées, un certain caractère de malice et de pénétration, donnaient à toute sa physionomie quelque chose de particulier qui a été admirablement rendu par le Titien, dans le beau tableau du Louvre où l'on voit le nain de Charles-Quint. Ce tableau résume en quelque sorte toutes les qualités du nain, et s'il n'est pas le portrait fidèle de Tom Pouce, c'est que le type qu'il présente est d'un âge plus avancé.

On doit regretter vivement qu'on n'ait pas conservé de mesures fidèles de tous les hommes qui se sont fait remarquer par des anomalies physiques, surtout par des anomalies de taille. Il serait intéressant de pouvoir rapprocher les mesures prises sur les différentes parties du corps, et de pouvoir reconnaître quelles proportions sont plus particulièrement affectées par ces anomalies. On s'est borné la plupart du temps à se rendre l'écho de la voix publique, toujours disposée à exagérer en pareille circonstance. Il est plus que temps que la science s'occupe de transmettre à nos descendants des renseignements plus exacts sur les choses qui peuvent mériter leur attention. Depuis qu'elle a commencé à enregistrer avec précision les éléments calculables des grands phénomènes de la nature, la météorologie, l'astronomie et les

autres sciences physiques ont, à la vérité, singulièrement perdu de leur merveilleux; l'imagination a pu en souffrir, mais la raison s'en est mieux trouvée. Il est plus que temps que la poésie se mêle un peu moins aussi des faits relatifs à l'homme, et nous permette de voir chaque chose, sans forcer nos rayons visuels à passer par son prisme trompeur.

TROISIÈME PARTIE.

DE L'ÉTUDE DES CAUSES.

LETTRE XXIII.

Des causes et de leur appréciation. — Causes constantes, causes variables, causes accidentelles.

Les phénomènes que nous présentent les êtres organisés sont si variables, qu'ils ne se manifestent peut-être jamais dans des circonstances parfaitement identiques; on le concevra sans peine, si l'on a égard au nombre infini de causes qui peuvent leur donner naissance, et à tous les degrés d'intensité dont ces causes sont susceptibles.

La fleur qui vient de s'épanouir, n'est arrivée à cet état de fraîcheur et d'éclat, que pour avoir été favorisée par une douce température et par l'humidité du sol et de l'air. Lors même qu'elle n'aurait pris naissance que sous l'action combinée de ces deux puissants agents de la nature, de combien

de manières cette action pouvait varier, ne fût-ce que pendant le cours d'une semaine! Depuis que le monde existe, la température et l'humidité de l'air n'ont peut-être pas été deux fois dans des circonstances absolument identiques pendant huit jours consécutifs. Que dire alors si l'on considère que l'épanouissement de la fleur pouvait dépendre encore de l'action des vents, de son exposition, du rayonnement solaire et d'une foule d'autres causes?

C'est cette extrême complication qui rend l'observation et le classement des phénomènes si difficiles. Si les causes qui agissent sur l'homme pour jeter le trouble dans son organisation et pour entourer de maladies sa frêle existence, n'étaient pas aussi nombreuses et aussi variables, la médecine serait depuis longtemps une science. Est-ce à dire qu'il faille renoncer à l'espoir de la voir arriver un jour à ce haut rang?

Les phénomènes que nous présentent les corps bruts sont également sous l'influence de causes nombreuses et variables; cependant on est parvenu à saisir ces causes et à en étudier les lois principales. Bien que toutes les ressources de l'analyse mathématique ne soient pas en état de calculer rigoureusement les mouvements de la machine la plus simple que fait agir la main de l'ouvrier, ou la marche du boulet lancé par l'artilleur; il est possible néanmoins d'arriver à des résultats assez voisins de ceux que l'on observe, pour qu'on puisse négliger les différences et se servir très-utilement des résultats approchés.

Il n'appartient, du reste, qu'à des esprits supérieurs d'apercevoir au milieu d'une infinité de causes qui donnent naissance à un événement, quelles sont les plus influentes, celles dont il faut tenir compte, et quelles sont celles que l'on peut négliger.

Sans ambitionner une mission aussi relevée, nous pouvons chercher cependant à introduire plus d'ordre dans les recherches; et peut-être aurons-nous fait un premier pas, si nous pouvons bien nous rendre compte de la nature des causes qui influent sur les événements.

On peut partager ces causes en trois classes principales :

Les causes constantes;

Les causes variables;

Les causes accidentelles.

Les causes *constantes* sont celles qui agissent, d'une manière continue, avec la même intensité et dans le même sens.

Les causes *variables* agissent, d'une manière continue, avec des énergies et des tendances qui changent, soit d'après des lois déterminées, soit sans aucune loi apparente. Parmi les causes variables, il importe surtout de remarquer celles qui ont un caractère de *périodicité*, comme les saisons.

Les causes *accidentelles* ne se manifestent que fortuitement, et agissent indifféremment dans l'un ou l'autre sens.

Si l'on apprécie les causes, sous le rapport mathématique, la cause constante a pour elle un certain nombre *déterminé* de chances, une probabilité fixe.

La cause variable a pour elle un nombre *variable* de chances, et par suite une probabilité qui peut osciller dans des limites plus ou moins larges.

La cause accidentelle n'a pas, à proprement parler, de chances en sa faveur; mais elle influe sur l'ordre de succession des événements. Ainsi, en tirant des boules d'une urne où sont des boules blanches et des boules noires, qui ont leur probabilité respective d'être tirées, les causes accidentelles n'introduisent aucune boule nouvelle de même couleur ou d'une couleur différente; mais elles font que l'ordre dans le tirage est plus ou moins régulier, s'écarte plus ou moins de l'ordre calculé, bien que leurs actions se neutralisent à la longue. On conçoit en effet que les boules peuvent être mêlées d'une infinité de manières.

S'il n'existait que des causes constantes, sans mélange de causes accidentelles, elles amèneraient tout d'abord les résultats qui leur sont propres, dans un rapport égal à leur degré d'énergie; mais comme il est impossible d'écarter entièrement les causes accidentelles, ce n'est qu'après un certain nombre d'expériences, qui dépend de la quantité et de la grandeur des causes accidentelles, que les résultats seront en rapport avec le degré d'énergie des causes qui les produisent.

LETTRE XXIV.

Des causes en général, et en particulier des causes accidentelles, quand les chances sont égales.

La distinction que j'ai établie entre les trois espèces de causes qui influent en général sur tous les phénomènes, s'expliquera mieux par un exemple. Je supposerai qu'il soit question de mesurer une longueur, la taille d'un homme; et, pour écarter les difficultés, j'admettrai d'abord que la mesure que l'on compte employer, est parfaitement exacte, seulement le nombre des divisions est limité, et les appréciations ne peuvent être prises qu'au dixième du millimètre. J'admettrai même que l'homme dont on veut connaître la taille, se tient parfaitement immobile pendant les épreuves et n'a aucune tendance à s'allonger ni à se raccourcir. J'accorderai encore que celui qui est chargé de mesurer, use de toutes les précautions imaginables pour arriver à une grande précision. En un mot, il n'existe aucune espèce de cause *constante* ou *variable* qui puisse altérer l'exactitude des résultats.

Malgré toutes ces concessions, on conçoit que les mesures que l'on prendra, ne seront pas identiquement les mêmes;

il se présentera de petites différences entre elles, sous l'influence des causes *accidentelles*, et, sans être maladroit, on pourra s'écarter de la taille véritable que l'on cherche à déterminer, d'un demi-millimètre par exemple, soit en plus, soit en moins. Ainsi, pendant qu'on mesure, la règle ne s'appliquera pas toujours horizontalement sur le sommet de la tête, elle n'appuiera pas toujours également fort, ni toujours sur le même point; les cheveux se dérangeront et formeront une épaisseur qui ne sera pas constamment la même; le coup d'œil ne sera pas également juste, ni les lectures également sûres.

Pour les personnes qui se sont occupées de pareilles mesures, elles accorderont bien volontiers, sans doute, que quand les erreurs ne vont pas au delà d'un demi-millimètre, on peut se tenir satisfait du résultat obtenu.

Or, si l'on avait pris mille mesures successives, bien peu seraient en erreur d'un demi-millimètre. La plupart ne différeraient de la véritable taille, soit en plus, soit en moins, que d'un dixième de millimètre, d'autres de deux dixièmes, d'autres de trois, et ainsi de suite.

En ne considérant que la mesure la plus grande et la mesure la plus petite, on trouverait entre elles une différence d'un millimètre entier, et l'on pourrait concevoir neuf groupes de mesures intermédiaires, procédant par différences d'un dixième de millimètre.

Ces divers groupes, Votre Altesse le sait déjà, ne seraient pas composés au hasard de nombres plus ou moins grands,

bien qu'ils proviennent de petites maladresses, de petites inexactitudes du coup d'œil. Leur formation se trouve indiquée *à priori* dans l'échelle de possibilité relative aux tirages de dix boules dans une urne qui ne contiendrait que des boules blanches et des boules noires en quantités égales; ainsi l'on peut dire d'avance combien d'observations tomberont dans le groupe qui renferme les mesures les plus petites, combien tomberont dans le groupe immédiatement supérieur, présentant un dixième de millimètre en plus; combien d'observations formeront le troisième groupe, ayant deux dixièmes de millimètre en plus; et ainsi de suite.

Ce singulier résultat étonne toujours les personnes peu familiarisées avec ce genre de recherches. Comment croire en effet que des erreurs, que des maladresses se font avec la même régularité qu'une série d'événements dont l'ordre de succession se trouve calculé d'avance? Il se passe ici quelque chose de mystérieux qui cesse de surprendre, quand on examine les choses de plus près. Le mode d'action des causes accidentelles n'a point été étudié avec assez de soin, et cependant il domine en quelque sorte l'explication de tous les phénomènes qui dépendent du calcul des probabilités. Je n'ai pas craint de lui donner une place très-étendue dans mes lettres précédentes, je crois donc pouvoir me dispenser de m'y arrêter davantage.

Voilà pour les causes accidentelles. Nous voyons qu'à la longue il s'établit une sorte d'équilibre entre les erreurs en plus et les erreurs en moins, équilibre qui fait qu'on arrive

en définitive à la véritable grandeur qu'on voulait mesurer.

Il n'en serait pas de même sous l'influence d'une cause *constante* d'erreur. Cette cause devrait prévaloir en définitive, et non-seulement le résultat final en serait affecté, mais, sous l'influence des causes accidentelles, les différents groupes se classeraient suivant des lois nouvelles, et n'auraient plus la symétrie que nous avions reconnue quand les chances étaient égales. Ainsi, nous avons supposé que la personne mesurée se tenait parfaitement immobile pendant les épreuves, et n'avait aucune tendance à s'allonger ni à se raccourcir. Mais, si le contraire avait lieu, on se trouverait exposé à faire de nouvelles erreurs, qui s'ajouteraient aux erreurs accidentelles.

Nous pouvons faire ici deux hypothèses : ou bien la personne mesurée, sans conserver une immobilité absolue, a autant de tendance à s'allonger qu'à se raccourcir; ou bien elle a une tendance plus prononcée, soit à s'allonger, soit à se raccourcir.

Dans le premier cas, la mobilité de la personne devrait être considérée comme une cause d'erreur accidentelle, dont les effets finiraient par se détruire à la longue; dans le second cas, au contraire, on arriverait en définitive à une mesure soit trop grande, soit trop petite. Si l'on avait mesuré, chaque jour, la même personne un assez grand nombre de fois pour anéantir les effets des causes accidentelles, la constance du résultat qu'on obtiendrait, pourrait faire croire qu'il est exact : Votre Altesse voit déjà avec quelle

circonspection on doit procéder dans l'appréciation des grandeurs.

Il arriverait plus généralement que la taille moyenne obtenue varierait d'un jour à l'autre, parce que la personne n'aurait pas la même tendance à s'allonger. La cause d'erreur serait alors *variable*.

La cause d'erreur peut être variable de différentes manières. Elle peut l'être, parce qu'en effet la personne mesurée, soit par caprice, soit par d'autres motifs, a une tendance à exagérer constamment sa taille, mais non d'une manière régulière. Elle peut varier encore *périodiquement*, si la personne est mesurée à différentes heures du jour : on a cru remarquer en effet que l'homme est plus grand le matin, au sortir du lit, que le soir, après les fatigues de la journée. Ainsi, 1000 mesures, prises le matin, donneraient une taille moyenne plus grande que 1000 mesures prises le soir, et la taille varierait par des nuances intermédiaires aux autres heures du jour. La cause peut donc varier régulièrement et irrégulièrement. Les variations *régulières périodiques* sont très-nombreuses dans la nature et devront occuper une place particulière dans mes lettres.

LETTRE XXV.

Des causes accidentelles, quand les chances sont inégales.

Je me promenais un jour dans les jardins de Trianon avec M. George Edwards; notre conversation s'était portée sur les sciences d'observation et sur les difficultés qu'elles présentent dans certains cas où il s'agit de l'appréciation des moyennes. A cette époque, ce savant s'occupait avec un soin tout particulier de ses expériences dynamométriques, et des variations de force que l'homme éprouve aux différentes époques de la journée, et l'on pourrait dire par suite de ses moindres actions : « Avez-vous remarqué, me dit-il, que pour les quantités qui admettent une moyenne dans leurs variations accidentelles, il y a souvent une tendance à produire des écarts plus grands au-dessus de la moyenne qu'au-dessous, bien que les chances de produire ces écarts paraissent absolument égales? » Non-seulement je lui répondis que j'avais fait depuis longtemps la même remarque, mais je lui fis connaître plusieurs exemples qui m'avaient frappé.

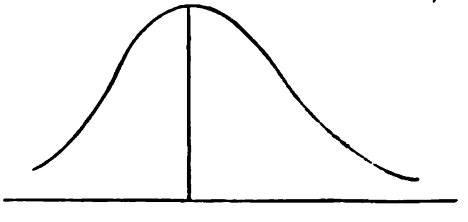
La nature est en cela comme les hommes, quand elle s'écarte de son type, c'est plus généralement pour exagérer

que pour amoindrir. Cette particularité continua à nous occuper longtemps encore, et M. Edwards voulut bien me proposer de réunir nos observations et nos réflexions sur ce sujet intéressant, pour en faire un travail commun. Mais bientôt après, je dus quitter Paris, et nos projets furent perdus de vue. J'ignore s'il continua à suivre le cours de ces idées; pour moi, j'y suis revenu souvent et je me suis aperçu que nous avions trop particularisé la question, parce que tous les exemples qui nous avaient occupés, portaient l'erreur dans le même sens.

Il peut arriver en effet que, dans certaines circonstances, la tendance que nous avions observée agisse en sens contraire, et que les écarts au-dessous de la moyenne soient généralement plus grands que ceux qui s'élèvent au-dessus.

Je dois me hâter d'ajouter encore que cette tendance à produire des écarts plus grands, soit au-dessus, soit au-dessous de la moyenne, quand les chances de ces écarts semblent égales, est toujours faible.

La courbe de possibilité perd alors sa forme régulière pour prendre celle qu'indique la figure.



Nous en trouvons un exemple dans l'appréciation de

la variation diurne de la température, pendant les mois d'hiver. Les plus grands écarts tombent au-dessus de la moyenne.

Le contraire a lieu pour les variations barométriques. On a reconnu, depuis longtemps, que l'abaissement du mercure au-dessous de la moyenne est en général plus grand que son élévation au-dessus de ce terme.

De pareils exemples ne se présentent pas seulement en physique, on les trouve encore dans les sciences politiques. J'ai eu déjà l'occasion d'en signaler un assez remarquable concernant les prix des grains. Dans les fluctuations qu'éprouvent ces prix, les écarts au-dessus de la moyenne pourront aller beaucoup plus loin que ceux au-dessous de cette même quantité, et l'on peut facilement se rendre compte de cette circonstance.

La mortalité est encore une quantité variable qui, dans ses écarts extraordinaires, pourra dépasser la moyenne de beaucoup plus qu'elle ne restera au-dessous. On ne remarque pas qu'on éprouve l'inverse des épidémies ou des pestes, c'est-à-dire qu'on rencontre de ces années où la mortalité diminue considérablement sous l'influence de certaines causes.

Les exemples où la moyenne ne tombe pas à égale distance des deux valeurs limites, et où la courbe de possibilité perd de sa symétrie, sont assez fréquents; ils méritent d'autant plus d'être étudiés, que ce défaut de symétrie tient toujours à des causes plus ou moins curieuses, dont on peut

apprécier l'influence. Ces causes ne sont pas de la nature de celles que nous avons étudiées jusqu'à présent. Tâchons de nous en rendre compte.

Je supposerai qu'au moyen du compas d'épaisseur, je cherche à déterminer le diamètre d'un corps de forme sphérique, et que, par différents essais, je trouve un diamètre moyen de 330 millimètres. Au milieu des nombreuses mesures qui auront été prises, il s'en trouvera une plus grande que toutes les autres, et une plus petite. J'ai dit que ces deux écarts de la moyenne doivent être égaux, si les chances d'erreur en plus et en moins sont parfaitement égales, et si les mesures ont été suffisamment nombreuses. Je les supposerai ici de trois millimètres seulement : telle serait donc la plus grande erreur que j'aurais à craindre.

Supposons que j'emploie le même compas, les mêmes procédés dans mes opérations, et que toutes les circonstances restent d'ailleurs identiquement les mêmes, quant à l'exactitude des mesures; il en résultera que les écarts que j'obtiendrai, quel que soit l'objet mesuré, finiront par être les mêmes et par se reproduire à la longue.

Il faudrait cependant faire une exception, si l'objet mesuré était un globule de moins de trois millimètres de diamètre : car, au pis-aller, je puis bien trouver parmi toutes mes mesures un diamètre extrêmement petit, nul même, si l'on veut, mais il serait absurde de le supposer au-dessous de zéro. Dans cette circonstance, le plus grand écart inférieur de la moyenne n'est plus possible, il deviendra nécessaire-

ment moindre que l'écart supérieur, qui continue à être de trois millimètres.

Il ne faut pas même que l'objet à mesurer soit moindre que le plus grand écart inférieur, pour qu'une inégalité se fasse déjà ressentir dans l'ordre des erreurs et pour que la courbe de possibilité perde de sa régularité.

Il arrive alors que les causes fortuites qui tendent à donner, les unes, des valeurs plus grandes, et, les autres, des valeurs plus petites que la moyenne, ne sont réellement plus les mêmes.

Nos sens nous trompent à cet égard peut-être plus encore que nos instruments. Nous en avons une preuve bien curieuse dans l'histoire de l'astronomie, au sujet de l'évaluation des diamètres apparents des étoiles. Les premiers astronomes qui s'occupèrent de déterminer l'angle sous lequel on aperçoit les étoiles les plus brillantes qui rayonnent dans le ciel, en exagérèrent beaucoup la grandeur. Kepler attribuait à Sirius un diamètre apparent de 240 secondes; Tycho Brahé, de plus de 120 secondes; et Albategnius le faisait, avant eux, de 45 secondes. La diversité de ces mesures montre suffisamment le peu de confiance qu'elles doivent inspirer. L'invention des lunettes fit voir que ces appréciations, la plus petite même, étaient fort exagérées. Gassendi ne donnait plus à Sirius que 10 secondes de diamètre apparent; Galilée, Hévélius, J. D. Cassini réduisaient ce diamètre à 5 ou 6 secondes. W. Herschel alla beaucoup plus loin, et n'estima qu'à de petites fractions de la seconde le dia-

mètre apparent de deux des plus belles étoiles du ciel. Ce célèbre astronome se demandait même si, pour Arcturus, l'évaluation ne devait pas tomber au-dessous d'un dixième de seconde. Quelle prodigieuse différence d'estimation pour des étoiles de première grandeur! Descendre de 240 secondes à la 2400e partie de cette appréciation!

Les détails relatifs à ces mesures diverses ont été présentés avec autant d'intérêt que de science dans une notice sur les travaux de sir W. Herschel, insérée par M. Arago dans l'*Annuaire du bureau des longitudes pour* 1842. Votre Altesse pourrait demander à laquelle de toutes ces appréciations il faut définitivement s'arrêter? Le perfectionnement des instruments et des méthodes d'observation devrait nous faire pencher naturellement vers les appréciations modernes; mais nous pouvons joindre encore à ces motifs de préférence, une espèce de démonstration directe, puisée dans la manière dont les étoiles sont occultées, quand la lune passe devant elles. La lune a, dans le ciel, un mouvement assez rapide pour lui faire parcourir un arc d'une demi-seconde de degré pendant une seconde de temps. Or, si une étoile avait un diamètre apparent d'une demi-seconde, il lui faudrait un intervalle d'une seconde de temps pour être entièrement éclipsée par la lune. On la verrait donc, pendant cette seconde, perdre *progressivement* sa lumière. Or, rien de semblable n'a lieu; et tous ceux qui ont observé les occultations des étoiles par la lune, savent que la disparition est instantanée, sans perte préalable de lumière. Il en est

de même de l'émersion, l'étoile reparaît subitement dans tout son éclat. Cette observation si simple, qu'on peut d'autant mieux vérifier que les lunettes employées sont plus puissantes, confirme pleinement l'appréciation des astronomes modernes.

Nous ne connaissons pas encore assez bien la portée de nos sens ni les limites des erreurs auxquelles ils sont sujets, pour pouvoir déterminer les chances que l'on peut avoir de se tromper dans les différentes évalutions qui en dépendent.

L'exemple que je viens de citer est curieux sous plus d'un rapport. Ainsi, l'on pourrait demander pourquoi je ne prends pas, pour diamètre angulaire d'une étoile, une moyenne entre toutes les déterminations qui ont été données par les divers astronomes; je répondrai qu'agir de la sorte, serait mettre toutes les observations sur le même rang et leur attribuer la même valeur. Si j'ai suivi une autre marche dans mes lettres précédentes, c'est que j'ai toujours supposé que les observations employées méritaient une égale confiance.

Il nous est facile de comprendre déjà comment il se fait parfois que, tout en jugeant les erreurs en plus et en moins également probables, nous trouvions des résultats tout à fait contraires à notre hypothèse. Nos instruments et nos sens peuvent nous tromper à notre insu, ou bien nous avons pu juger égales des chances qui ne l'étaient réellement pas. Nous en sommes prévenus alors par la manière même dont

se groupent les résultats. Dès que les observations sont influencées par des causes qui agissent dans un sens plus fortement que dans un autre, la courbe de possibilité perd sa régularité; le sommet se déplace, selon que les causes agissent, pour faire naître des erreurs plus fortes dans un sens que dans un autre.

On peut, pour plus de facilité, grouper les causes d'erreurs en deux classes : les unes tendant à produire des erreurs en plus, et, les autres, des erreurs en moins. J'ai examiné très-longuement le cas où les causes, de part et d'autre, ont même intensité; c'est en effet le plus intéressant. Le cas où les deux groupes agissent avec des intensités inégales aura besoin, pour être examiné, que nous nous soyons d'abord bien entendus sur la nature des causes qui influent sur les divers événements.

LETTRE XXVI.

Loi de sortie de deux événements dont les chances sont inégales.

Votre Altesse n'aura pas oublié sans doute ce que j'ai dit sur l'admirable symétrie qui se manifesterait dans l'inscription des naissances, si les garçons et les filles naissaient en nombre égal. Des lois non moins remarquables, bien que différentes, règleraient l'ordre des naissances, si les garçons naissaient plus nombreux que les filles; et ces lois générales régissent l'ordre de sortie de tous les événements qui dépendent de deux espèces de chances inégales.

Pour réduire la question à ses termes les plus simples, j'aurai recours à mon oracle habituel; j'interrogerai une urne qui contient des boules de deux espèces de couleurs, mais en nombre inégal. Je supposerai, par exemple, trois boules blanches pour deux boules noires. Je supposerai, de plus, que l'on tire les boules une à une, qu'on les inscrit après chaque tirage, et qu'on les remet ensuite dans l'urne.

Après 1000 tirages, si l'on a la curiosité de compter le nombre des boules blanches et celui des boules noires amenées par le sort, on trouvera deux nombres qui s'écar-

teront fort peu de 600 et 400; et ce rapport de 6 à 4 se vérifierait d'autant mieux, que le nombre des tirages aurait été plus considérable. Quel que soit ce rapport, des tirages suffisamment prolongés finiront toujours par le faire connaître.

De même aussi, quoique nous ne connaissions pas le secret de la nature, nous pouvons le deviner avec une approximation toujours croissante, en ayant la patience de l'interroger pendant un temps suffisamment long. Ainsi, en supposant que la nature produisit les naissances masculines et les naissances féminines dans un rapport déterminé et immuable, nous en serions avertis en prolongeant suffisamment nos épreuves. Non-seulement les naissances, prises une à une, présenteraient numériquement ce rapport, mais en les prenant deux à deux, trois à trois, etc., nous pourrions assigner d'avance l'ordre de sortie. Mais revenons à l'exemple que j'avais choisi en premier lieu.

Si l'on prend les boules deux à deux, la première avec la seconde; la troisième avec la quatrième, et ainsi de suite, on formera trois espèces de groupes binaires; et 25 groupes tirés de l'urne se distribueront généralement ainsi qu'il suit :

9 groupes de deux boules blanches;
12 id. d'une boule blanche et d'une boule noire;
4 id. de deux boules noires.

Si l'on prend les boules trois à trois; la première, la

seconde et la troisième; la quatrième, la cinquième et la sixième, et ainsi de suite, on formera quatre espèces de groupes ternaires; et 125 groupes tirés de l'urne se distribueront généralement ainsi qu'il suit :

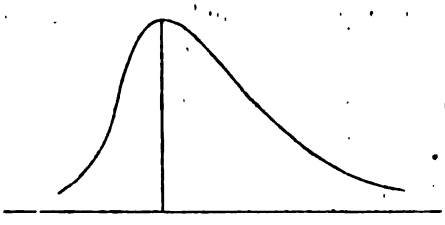
27 groupes de trois boules blanches;
54 id. de deux boules blanches et d'une noire;
36 id. d'une boule blanche et de deux noires;
8 id. de trois boules noires.

Si l'on prend les boules quatre à quatre, on formera cinq espèces de groupes, et 625 groupes se distribueront généralement ainsi qu'il suit :

81 groupes de quatre boules blanches;
216 id. de trois boules blanches et d'une noire;
216 id. de deux boules blanches et de deux noires;
96 id. d'une boule blanche et de trois noires;
16 id. de quatre boules blanches.

Sans aller plus loin, nous voyons déjà que nos groupes n'offrent plus cette symétrie que nous avions remarquée quand les chances de sortie pour les deux couleurs étaient égales. Il ne faut pas se hâter de conclure cependant qu'il n'existe plus aucun ordre dans les résultats. La courbe de possibilité, sans être symétrique, conserve une forme très-régulière : ainsi, pour 100 000 groupes de 16 boules chacun, la distribution des boules aurait lieu comme il est indiqué

dans la 4e colonne du tableau joint à cette lettre, et la courbe de possibilité aurait la forme suivante.



Le groupe qui a la probabilité la plus forte en sa faveur, est le septième; sur 16 boules, il en contient 10 blanches et 6 noires. La théorie indique, en effet, que le terme le plus grand est celui qui renferme les boules blanches et les boules noires dans un rapport égal à celui de leurs probabilités respectives de sortie; ce rapport serait ici de 3 à 2 ou de 9 à 6.

On voit que les deux limites sont, par suite, inégalement distantes du terme *maximum* et, par conséquent, de la moyenne des résultats. La moyenne se présente, ici, entre le septième et le huitième terme, mais plus près du septième; ce qui est une conséquence de ce que j'ai dit précédemment. Les écarts compris entre la moyenne et les deux limites, sont inversement proportionnels aux chances qu'ils ont en leur faveur.

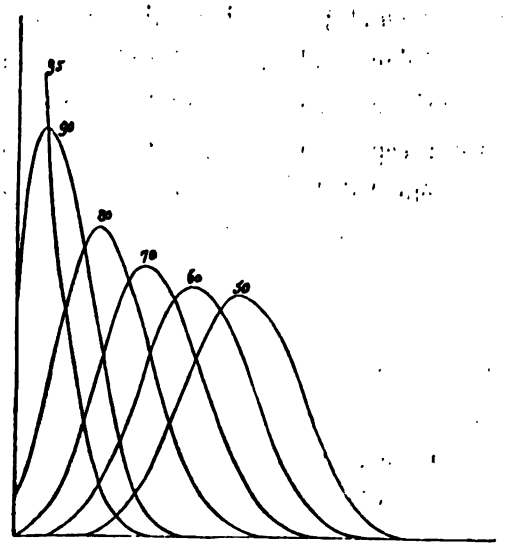
Votre Altesse comprendra dès lors que la moyenne se rapprochera plus ou moins de l'une ou de l'autre limite, selon que les chances pour et contre l'événement attendu

seront plus ou moins inégales. Le tableau qui accompagne cette lettre, pourra rendre ceci plus sensible. (Voyez les *notes*.) Dix colonnes verticales indiquent successivement toutes les probabilités du tirage de 16 boules à la fois, dans une urne contenant un nombre infini de boules blanches et de boules noires, réparties de manière que, sur 100 boules, il s'en trouve soit 50 blanches, soit 55, soit 60, soit 65, etc.

La première colonne horizontale exprime la probabilité de ne pas tirer de boules noires et, par conséquent, de n'amener que des boules blanches. La seconde colonne donne la probabilité de ne tirer qu'une boule noire et 15 boules blanches. La troisième donne la probabilité de prendre 2 boules noires et 14 boules blanches, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière, qui exprime la probabilité de prendre à la fois 16 boules noires. On n'a écrit que les probabilités supérieures à 0,00001.

Votre Altesse remarquera que la probabilité *maximum* qui se trouve à la neuvième place, quand, sur 100 boules, l'urne est supposée en contenir 50 blanches, remonte successivement et vient se placer à la première place, quand, sur 100 boules, l'urne en contient 95 blanches et 5 noires.

Les lignes de la figure suivante rendront ce résultat plus sensible. Chacune d'elles représente les nombres de l'une de nos colonnes verticales, et bien que nous ne puissions faire notre table de manière à exprimer toutes les combinaisons imaginables, il sera facile de juger comment marcheraient les séries que je suis forcé d'omettre.



Si j'ai été suffisamment clair dans ce qui précède, voici ce que Votre Altesse pourra conclure de mes paroles : un très-grand nombre de boules ayant été tirées successivement d'une urne qui contient autant de boules blanches que de boules noires, et ces boules ayant été prises 16 par 16, par exemple, les groupes se distribueront symétriquement autour d'un groupe plus grand, quand je les séparerai par ordre des couleurs. Quand l'urne contiendra plus de boules noires que de boules blanches, la symétrie n'aura plus lieu; on trouvera encore un groupe plus grand, mais les autres groupes se distribueront inégalement des deux côtés de celui-ci. Cette inégalité sera d'autant plus forte, que les deux espèces de chances offriront numériquement des différences plus grandes.

Prenons un exemple; je le choisirai parmi ceux que j'ai mentionnés déjà dans ma lettre précédente. La température, à Bruxelles, varie assez sensiblement dans l'espace de vingt-quatre heures; cependant ces variations sont moindres en hiver qu'en été. J'ai déjà eu l'occasion de dire qu'en décembre et janvier la variation diurne de la température est de quatre à cinq degrés centigrades, tandis qu'en juin elle est double.

Or, prenons la variation de janvier; elle n'a pas toujours été de quatre à cinq degrés; elle a été tantôt plus grande, tantôt plus petite; et, sur 300 jours d'observations faites de 1833 à 1842, ces variations se sont distribuées de la manière suivante :

8	variations	diurnes	de	1	à	2	degrés	centigrades.
31	id.	id.	de	2	à	3	id.	id.
61	id.	id.	de	3	à	4	id.	id.
68	id.	id.	de	4	à	5	id.	id.
50	id.	id.	de	5	à	6	id.	id.
32	id.	id.	de	6	à	7	id.	id.
22	id.	id.	de	7	à	8	id.	id.
20	id.	id.	de	8	à	9	id.	id.
8	id.	id.	de	9	à	10	id.	id.
4	id.	id.	de	10	à	11	id.	id.
3	id.	id.	de	11	à	12	id.	id.
1	id.	id.	de	12	à	13	id.	id.
1	id.	id.	de	13	à	14	id.	id.

Bien que les nombres de la première colonne verticale ne se distribuent pas symétriquement des deux côtés du nombre le plus grand, cependant Votre Altesse reconnaitra qu'ils

décroissent d'une manière assez régulière. Si nous avions à construire la ligne qui les représente, elle se rapprocherait considérablement, pour la forme, de celle qui représente les nombres de la septième colonne de notre tableau général. Or, cette septième colonne exprime les chances de sortie pour une urne qui, sur 100 boules, en aurait 80 blanches et 20 noires. L'analogie serait plus grande encore, pour les nombres donnés précédemment, en supposant dans l'urne 81 boules blanches et 19 noires. Que faut-il conclure maintenant de ce rapprochement?

Les conclusions sont les suivantes : 1° il existe une variation diurne de température de quatre à cinq degrés, ou plus exactement de 4°,7; elle est donnée par la moyenne de toutes les observations; 2° cette variation subit l'influence de causes inégales; 3° les causes qui tendent à faire tomber la variation diurne à son *minimum*, ont plus de chances en leur faveur que celles qui tendent à l'élever à son *maximum*, et les chances sont dans le rapport de 81 à 19, ou plus simplement de 4 à 1; 4° les distances de la moyenne aux deux valeurs limites sont réglées par ce même rapport de 4 à 1.

Ce dernier résultat ne semble pas tout à fait d'accord avec ce que nous donne l'expérience. Car au-dessus du plus grand terme 68, il s'en trouve 9, et on en compte 3 au-dessous. Ces deux nombres sont dans le rapport de 3 à 1, et non de 4 à 1. Mais il faudrait un plus grand nombre d'observations pour voir s'établir une entière concordance entre la théorie et l'expérience.

En hiver, les causes qui tendent à faire descendre la variation diurne vers sa limite inférieure, ont donc beaucoup plus de probabilité que les causes qui agissent dans un sens opposé. Au mois de juin, c'est le contraire : ces dernières causes ont un peu plus de chances que les premières, et l'on passe à peu près graduellement de l'un à l'autre état. C'est ce que fera mieux comprendre un second tableau, où j'ai inscrit toutes les variations diurnes observées chaque mois et les nombres proportionnels qui leur correspondent, afin de rendre les rapprochements plus faciles. (Voyez les *notes*.)

Les deux colonnes horizontales inférieures font connaître les influences relatives des deux espèces de causes accidentelles qui tendent à faire osciller la valeur normale entre ses deux limites.

Parmi les causes accidentelles, on peut donc regarder les unes comme tendant à ramener la variable vers sa limite inférieure, et les autres comme tendant à l'élever jusqu'à sa limite supérieure. Quand ces causes sont égales entre elles, la courbe de possibilité est symétrique; quand les unes ont plus de chances en leur faveur, elles ramènent vers elles le sommet de la courbe, et le rapprochement est d'autant plus grand que le nombre des chances est plus considérable. Quelquefois les chances ne sont soumises à aucune loi appréciable, et la courbe de possibilité peut affecter les formes les plus capricieuses. Ce que j'aurai bientôt occasion de dire sur la nature des causes, me dispense d'entrer à ce sujet dans de plus amples détails, au moins pour le moment.

Les causes accidentelles qui ont de l'influence pour faire varier le prix des grains, peuvent être rangées en deux classes : les unes tendent à élever le prix, les autres à l'abaisser.

Si les premières causes agissaient simultanément, sans être troublées par l'action des secondes, les grains atteindraient le *maximum* de leur prix ; dans l'hypothèse opposée, les grains tomberaient au *minimum* de leur valeur, et l'une ou l'autre limite se trouverait atteinte.

Mais il arrivera plus généralement que les causes qui tendent à élever le prix et celles qui tendent à le faire baisser, se neutraliseront en partie, et le prix le plus probable auquel les grains se trouveront portés, sera celui qui s'éloignera des limites extrêmes, en raison inverse de l'énergie des deux classes de causes. Ainsi, de ce que le prix des grains, dans ses écarts de l'état normal, s'élève accidentellement beaucoup plus qu'il ne descend, nous pouvons conclure que les causes qui tendent à le ramener vers sa limite inférieure ont plus de probabilité, ou, si l'on veut, plus d'énergie que les causes contraires.

Il en est de même de la mortalité : les causes accidentelles qui tendent à la ramener vers sa limite inférieure, ont beaucoup plus de probabilité que les causes contraires, soit parce qu'elles sont plus nombreuses, soit parce qu'elles ont plus d'énergie.

LETTRE XXVII.

Des causes constantes.

Si j'ai donné une grande part à l'étude des causes accidentelles, c'est que cette étude mérite toute notre attention : même en dehors de la science, elle présente quelque chose de mystérieux bien propre à exciter la curiosité. N'est-il pas remarquable, en effet, de voir, à travers une longue série d'expériences, toutes les petites causes d'erreurs fortuites se compenser et s'entre-détruire? Et les compensations s'établissent d'une manière si régulière, que les différents résultats, obtenus à la place du véritable que l'on cherche, viennent se ranger des deux côtés de celui-ci, dans un ordre qui peut être assigné d'avance. Cet ordre reste le même, inaltérable; seulement les limites qui embrassent les résultats, sont plus ou moins resserrées, selon l'adresse de l'observateur et les moyens plus ou moins précis qu'il emploie.

Il est donc possible de détruire les erreurs fortuites et d'avoir une mesure de l'exactitude de l'observateur, en même temps que de la précision du résultat final.

Ce résultat nous donne le moyen d'apprécier les causes

constantes ou *variables*. La théorie nous apprend, en effet, qu'en multipliant suffisamment les épreuves, il arrive, pour ces causes, l'opposé de ce qu'on remarque pour les causes accidentelles; c'est-à-dire que leurs effets se prononcent de plus en plus, à mesure que les effets de ces dernières s'effacent, et qu'en définitive, l'événement est modifié proportionnellement à l'énergie de chaque cause.

Ces principes étant de la plus grande importance, je présenterai quelques développements pour les faire mieux comprendre.

Supposons qu'on demande de déterminer d'une *manière générale*, quelle est la probabilité qu'un enfant qui va naître, sera du sexe masculin. Il est évident que, pour ramener cette appréciation au cas facilement calculable où toutes les chances seraient connues, il faudrait savoir dans quel rapport se produisent les naissances masculines et les naissances féminines. Or, la nature ne nous a pas transmis son secret à cet égard; elle nous a permis seulement de chercher à le pénétrer par l'observation : c'est donc à l'observation qu'il faut recourir. En s'y livrant avec tout le soin et toutes les précautions qu'exige la science, on obtient les données nécessaires à la solution du problème; et, dans le cas actuel, on trouve que, pour 100 naissances féminines, il faut compter généralement 105 naissances masculines *.

La question conduit donc aux mêmes termes que s'il s'agissait de savoir quelle est la probabilité de tirer une

* *Physique sociale*, t. I, p. 43.

boule blanche d'une urne contenant 105 boules blanches et 100 noires; ou, plus exactement, contenant un nombre infini de boules blanches et de boules noires réparties entre elles dans le rapport de 105 à 100. Cette probabilité, comme nous le savons déjà, est $\frac{105}{205}$.

Pour suppléer au silence de la nature, j'ai dit qu'il fallait recourir à l'observation. Or, quelle est la marche à suivre en pareille circonstance? En examinant une question semblable à celle qui nous occupe, j'ai fait remarquer à la fin de ma première lettre, que les observations recueillies par un seul individu, même par une personne de l'art enregistrant soigneusement les résultats de sa pratique, ne seraient pas suffisantes. Au milieu de deux à trois mille cas qu'embrasse cette pratique, tout ce qu'on pourrait reconnaître, c'est que le nombre des naissances masculines a différé assez peu du nombre des naissances féminines. Un second observateur, tout aussi consciencieux que le premier, aurait pu déduire, d'après sa pratique particulière, un résultat semblable; à cela près qu'il aurait trouvé peut-être quelques naissances masculines en plus, tandis que l'opposé aurait eu lieu chez son confrère.

Il résulterait donc de là que ni l'un ni l'autre de ces praticiens n'aurait réuni des observations en nombre suffisant, pour que le résultat pût représenter la véritable marche de la nature, ou le rapport qui existe en général entre le nombre des naissances masculines et celui des naissances féminines. Les causes accidentelles n'étaient pas convena-

blement éliminées, et leurs effets tendaient encore à masquer ceux des causes constantes.

Il fallait donc observer sur une échelle plus étendue. Hé bien, cherchons à savoir si les résultats déduits annuellement de la pratique de tous les observateurs d'une grande ville, pourraient suffire pour notre objet. Nos conclusions seront même d'autant plus précises, que nous aurons moins à craindre, ici, de la négligence des observateurs, puisque nous prendrons nos données dans les registres de l'état civil, où les inscriptions se font en vertu d'une loi.

Le tableau des naissances qui ont eu lieu à Bruxelles, depuis 1825 jusqu'en 1842 inclusivement, nous fait connaître d'abord que, pendant 18 années, deux fois seulement le nombre des naissances masculines a été inférieur à celui des naissances féminines, et une fois les deux nombres ont été égaux *; encore, dans les deux premiers cas indiqués, l'excédant était à peine sensible; on comptait en effet :

En 1832,	1851	naissances masc.	et 1854	naissances fém.
En 1839,	2247	id.	2272	id.

Il y avait donc une prédominance marquée en faveur des naissances masculines. Nous pourrions même calculer, d'après ce qui a été dit dans les premières lettres, quelle serait la probabilité pour que l'année 1843 présentât également un excédant de naissances masculines, de même que la probabilité qu'il existe une cause qui facilite cette inégalité.

* *Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles pour* 1844.

Si nous avions suivi ce genre d'observations, à partir de 1825, en perfectionnant successivement notre résultat à mesure que les observations s'accumulaient, les choses se seraient présentées sous un autre point de vue. Ainsi, pour l'année 1825, nous eussions compté 2004 naissances masculines et 1759 naissances féminines, ce qui donne le rapport 114 à 100.

Ce rapport très-grand aurait été fort modifié par les résultats de 1826, qui donnent 101. Auquel faut-il croire? Le bon sens, d'accord avec la science, nous conseille de faire de nouvelles observations, et d'adopter provisoirement le résultat moyen 107, qu'on aurait obtenu en prenant toutes les observations recueillies.

La troisième année aurait encore modifié ce rapport, en le diminuant; on aurait obtenu 106 pour résultat des trois premières années d'observations.

En continuant à opérer de la même manière, au bout de la 10e année on aurait eu, pour le rapport cherché, 104, et, après 18 ans, 103. Ce dernier rapport, comparé à ceux obtenus pour chaque année prise séparément, en aurait plus ou moins différé: les plus grands écarts en plus et en moins auraient été donnés par les années 1825 et 1830, où l'on a eu les rapports 114 et 90.

La précision du résultat général 103, comparée à celle d'une année particulière, aurait été sensiblement dans le rapport des racines carrées des nombres 18 et 1, d'après ce que nous a déjà fait connaître la théorie, ou comme 4,24 est à 1.

Bien que la théorie indique, en thèse générale, que la précision des résultats augmente avec le nombre des observations, il peut se faire qu'accidentellement on tombe tout d'abord sur des résultats plus précis que ceux que l'on obtiendrait en ajoutant de nouvelles observations aux observations déjà faites. Ainsi les résultats particuliers des années 1829, 1831, 1833, 1834, etc., ont tous également donné le rapport 105, et se sont plus rapprochés du résultat définitif que le rapport calculé sur l'ensemble des observations des dix premières années. Mais cette précision n'est alors que fortuite; et l'on n'a aucune raison pour pouvoir s'y fier avec une probabilité suffisante.

Si l'on continuait indéfiniment les observations, on obtiendrait un rapport qui se rapprocherait de plus en plus d'être égal au véritable rapport qu'on ignorait et dont la nature nous faisait mystère.

Il y a plus, la théorie des probabilités nous donne encore le moyen de calculer quelle est la probabilité que le rapport trouvé ne s'écarte pas du rapport cherché au delà d'une certaine limite assignée. Ainsi, quoique nous ne connaissions pas quel est effectivement le rapport du nombre des naissances masculines au nombre des naissances féminines, on peut dire cependant qu'il y a un certain nombre à parier contre 1, que le rapport 105 à 100 ne s'écarte pas du vrai rapport de plus d'une unité, par exemple. C'est ce que j'ai fait voir suffisamment quand il a été question des tables de possibilité et de précision.

Il existe donc une cause constante qui tend à faire pré-

dominer les naissances masculines; on peut estimer que cette cause est à celle qui détermine les naissances féminines comme 105 est à 100, quant à leur intensité respective.

Nous admettons ici, en thèse générale, que *les effets sont proportionnels aux causes qui les produisent.* Ce principe fécond sert pour ainsi dire de fondement à toutes les sciences d'observation.

Puisqu'il est si avantageux de faire porter ses observations sur de grands nombres, il est évident que nous eussions mieux fait de prendre, pour base de nos calculs, un nombre de naissances produit pendant une longue série d'années, ou bien le nombre des naissances produit par tout le Brabant, ou mieux encore celui de tout le royaume de Belgique. Le tableau suivant contient les résultats du calcul; pour ne pas trop l'étendre, je ne donne que les nombres relatifs à cinq années*.

ANNÉES.	NOMBRE DE NAISSANCES MASCULINES pour 100 naissances féminines.		
	à BRUXELLES.	dans LE BRABANT.	dans LA BELGIQUE.
1832. . . .	100	106.2	106.7
1833. . . .	105	103.7	106.0
1834. . . .	105	105.3	107.2
1835. . . .	100	105.5	105.6
1836. . . .	112	106.1	106.3
MOYENNES.	106.2	105.3	106.7

(*) Voyez les *Annuaires de l'observatoire royal de Bruxelles.*

Le plus grand écart de la moyenne a été de 6,2 pour Bruxelles, de 1,6 pour le Brabant et de 1,3 pour le royaume. Les limites des écarts se sont donc resserrées à mesure que j'opérais sur des nombres plus grands. Une circonstance assez remarquable se présente ici, c'est que le rapport général pour les cinq années, diffère très-sensiblement, selon qu'on le prend pour Bruxelles, pour la province ou pour le royaume.

Nous devons nous demander avant tout, si cette différence doit être attribuée à l'effet des causes accidentelles ou à celui de causes constantes ou variables. On pourra pencher pour la première hypothèse, si l'on considère que la seule année 1836 jette une espèce de perturbation dans les nombres de Bruxelles: en ne prenant, en effet, que les nombres des quatre années précédentes, on n'aurait pas même 105 pour rapport au lieu de 106,2. Cependant il convient d'examiner les choses de plus près et de rechercher s'il n'existerait pas des causes qui font que le rapport pour Bruxelles n'est pas le même que pour le royaume entier, ou même pour le Brabant seulement.

Ces causes existent réellement; car, si l'on compare les naissances des deux sexes dans les villes et dans les campagnes, on trouve qu'il naît généralement plus de garçons dans les campagnes. Nous aurions donc fait une erreur grave en confondant deux choses qui ne doivent pas être confondues.

Ce premier exemple nous rendra plus circonspects; nous sommes prévenus déjà que nous ne devons pas obtenir le même rapport pour des localités différentes. Ce rapport ne

varie pas seulement avec les localités, il est influencé encore par d'autres circonstances. Dès lors ce n'est qu'avec beaucoup de précaution qu'on peut énumérer les causes influentes et apprécier leurs effets.

Or, l'énumération complète des causes influentes est à peu près impossible dans la plupart des phénomènes sociaux, parce que ces causes ne sont pas seulement très-nombreuses, mais quelquefois elles sont si indirectes et en même temps si faibles; qu'elles échappent à toutes les investigations. Le propre des génies observateurs est de savoir saisir les causes les plus influentes, celles qui modifient sensiblement les phénomènes, celles surtout qui agissent d'une manière continue ou périodique, et d'abandonner les autres comme négligeables et pouvant être rangées parmi les causes accidentelles, dont les résultats sont inappréciables quand les épreuves sont suffisamment répétées.

C'est ici le lieu de faire une remarque curieuse concernant des erreurs à peu près inévitables, et dont peut-être on ne tient pas assez compte; elle concerne l'observateur même et la manière dont ses observations sont recueillies. Je suppose, par exemple, que la négligence fasse omettre des inscriptions de naissances, sans que cette omission porte de propos délibéré sur un genre de naissances plutôt que sur un autre; il en résultera de petites inexactitudes tantôt en plus, tantôt en moins, qui, à la longue, s'entre-détruiront elles-mêmes : car, d'après notre hypothèse, la chance pour une erreur en plus est la même que celle pour une erreur

en moins. Cette cause d'erreur peut donc être rangée parmi les causes accidentelles.

Si les inscriptions se faisaient au contraire avec une certaine propension à omettre les naissances masculines, par exemple, soit de la part des autorités, soit de la part des parents, pour soustraire plus tard leurs enfants au service militaire, cette propension, agissant toujours dans le même sens, finirait par se manifester à la longue, et devrait être rangée parmi les causes constantes, ou plutôt parmi les causes variables, puisqu'elle changerait avec les chances de guerre et de danger.

Ce sont ces causes constantes et variables qu'il est si important de reconnaître dans les phénomènes sociaux. La plupart du temps il est presque impossible de les assigner *à priori;* l'on n'aperçoit leurs effets que dans les nombres, et alors il est assez difficile de déterminer leur véritable nature. Ainsi, l'on voit qu'il naît généralement plus de garçons dans les campagnes que dans les villes; mais quel en est le véritable motif?

Les causes qui font varier le rapport des naissances des deux sexes sont assez nombreuses. J'ai examiné successivement l'influence du climat, celle du séjour des villes et des campagnes, celle de la légitimité des naissances, celle de l'âge des parents, etc. Parmi ces différentes causes, il paraîtrait que l'âge des parents joue le plus grand rôle; mais nous n'avons encore que très-peu d'observations exactes à ce sujet.

Quand il se présente ainsi plusieurs causes également influentes, et que l'on veut analyser les effets de chacune d'elles, l'art consiste à réunir de bonnes observations et à les grouper de manière que toutes les causes, excepté celle dont on veut apprécier l'influence, puissent être considérées comme ayant agi également sur les nombres de chaque groupe. Si cette séparation a été faite avec tout le soin convenable, et si l'on remarque encore des différences entre les résultats, on ne peut les attribuer qu'à des causes accidentelles ou bien à la cause même dont on cherche à déterminer l'influence.

Il n'est pas toujours facile, en pareil cas, d'éviter des méprises, et de ne pas attribuer spécialement à la cause dont on est préoccupé, le résultat de plusieurs causes qui ont agi simultanément dans le même sens. Les appréciations en apparence les plus simples, donnent souvent lieu à de graves erreurs.

LETTRE XXVIII.

Des causes variables.

L'habitude d'observer n'a pas émoussé en moi le sentiment d'admiration que j'ai toujours éprouvé à la vue du ciel. La magnificence et l'imposante régularité de ce spectacle contrastent merveilleusement, pendant le calme des nuits, avec la succession rapide et tumultueuse des objets dont on a été préoccupé pendant le jour : on se sent pour ainsi dire transporté dans un autre monde. Le silence d'un observatoire, le battement monotone et régulier de la pendule et la marche plus régulière encore des astres, ajoutent beaucoup à cette illusion; on comprend mieux alors et la faiblesse de l'homme et la puissance de l'Être suprême : on reste frappé de l'inflexible constance des lois qui règlent la marche des mondes et qui président à la succession des générations humaines.

Chaque seconde que je compte est retranchée de ma courte existence; je puis prévoir déjà l'instant où un autre observateur viendra s'asseoir à la place que j'occupe, et fixera à son tour son attention sur l'astre que j'observe.

Tout ce qui m'entoure aura changé, hormis ces globes brillants, qui, au milieu de tant de vicissitudes, auront conservé leur marche inaltérable. Mais que dis-je? Ces globes mêmes ont peut-être une existence limitée dans le temps, comme leurs dimensions sont limitées dans l'espace, et je ne les juge éternels qu'en les rapportant aux bornes étroites entre lesquelles je me trouve moi-même resserré.

Les étoiles peuvent être emportées à travers l'espace avec une vitesse prodigieuse, sans qu'à mes yeux elles paraissent se mouvoir; pour juger des grandes lois de la nature, il faut savoir se placer à des distances convenables. Quelques-unes de ces distances semblent n'être pas entièrement hors de notre portée. Ainsi, il se trouve dans la constellation du Cygne, une petite étoile qui se déplace annuellement d'une valeur apparente extrêmement petite, bien qu'en réalité elle marche avec la plus grande vitesse. Cet astre est probablement une des étoiles les plus rapprochées de nous, et si nous ne pouvons constater le même mouvement chez les autres, c'est que leur éloignement est plus considérable.

Il y a plus; ces corps célestes, en voyageant à travers l'espace, ont probablement, comme notre soleil, un mouvement de rotation autour d'un axe et un cortége de planètes qui les entourent; c'est au moins ce que permettraient de croire les étoiles *changeantes*, qui ont des retours périodiques de plus grand et de plus faible éclat.

On a vu des étoiles briller pendant un certain temps et

disparaître ensuite; tandis que les *nébuleuses* nous offrent le spectacle curieux de soleils qui se forment et se trouvent dans un état de développement plus ou moins avancé. Si nous n'en avons pu saisir tous les progrès, c'est que le temps a manqué à nos observations. Que sont en effet quelques siècles, quand il s'agit de l'existence des mondes?

En présence de ces grands phénomènes, on peut se demander s'il y a des causes constantes; et si tout, dans l'univers, n'est pas soumis à des fluctuations?

Comparée aux innombrables soleils qui parent la voûte céleste, notre planète n'est qu'un corps très-secondaire, un grain de poussière perdu dans l'immensité, et cependant il lui a fallu des siècles pour arriver à l'état où nous la voyons; quand on l'étudie, on reconnait les phases successives par lesquelles elle a dû passer, et l'on acquiert la conviction qu'il n'est rien de stable à sa surface.

La nature a pris soin d'enregistrer, elle-même, avec une admirable fidélité, les phénomènes qui se sont succédé depuis l'origine de notre terre; et elle nous a conservé les types des premières espèces de plantes et d'animaux.

On reconnait une organisation toute particulière à ces produits bizarres d'un premier monde, destinés à vivre tour à tour au milieu des eaux, dans des terrains fangeux ou dans une épaisse atmosphère. Quelques-uns, avec les allures des reptiles, sont doués des organes nécessaires pour la natation, d'autres déploient de vastes ailes entre les écailles dont ils sont cuirassés. L'imagination seule pourrait rêver des

formes aussi extraordinaires, si la géologie ne les trouvait consacrées à jamais dans la pierre, partout où elle creuse le sol pour interroger les annales du monde primitif. La végétation même est en rapport avec ces êtres monstrueux, dont les débris seuls subsistent encore.

En produisant ces métamorphoses, la nature est loin d'en avoir voulu dérober le secret. Le livre où elle les a inscrites est constamment ouvert devant nous; elle a tracé jusque dans l'arbre qui se développe, le souvenir des variations météorologiques qu'il a subies, et la curiosité de l'homme retrouve, dans les couches concentriques du bois, les traces des hivers plus ou moins rigoureux qui ont précédé.

L'Être suprême n'a donc pas seulement répandu partout la vie et le mouvement, il a voulu encore en conserver l'empreinte. Il a fait plus, il a permis à l'homme de s'associer en quelque sorte à son œuvre, et de la modifier. Nous trouvons en effet, presque partout, à la surface de notre globe, les ouvrages de la nature altérés par la main de l'homme. J'ai nommé ailleurs causes *naturelles* celles qui influent sur les phénomènes et qui agissent en dehors de la sphère de notre activité, et causes *perturbatrices* celles que nous développons nous-mêmes et qui tendent en général à altérer la marche de la nature.

Ces dernières causes sont essentiellement variables; elles portent en quelque sorte le cachet de la faiblesse humaine; elles n'exercent leur action que temporairement et dans des limites très-resserrées. Les causes naturelles, au contraire,

même dans leurs variations, portent un caractère de grandeur et de généralité qui mérite toute notre admiration; on peut les contrarier, les modifier dans leurs manifestations, mais sans en altérer jamais la nature : elles finissent toujours par reprendre leur caractère originel.

Pour reconnaître les causes *variables*, le moyen le plus simple est de partager par groupes ou séries les nombres que l'on suppose influencés par elles. Quand ces groupes sont formés de la même manière et comparables sous tous les rapports, ils seront successivement égaux entre eux, si les causes qui leur ont donné naissance sont constantes; ils seront inégaux, au contraire, si ces causes sont variables.

Pour en prendre un exemple, je rechercherai, d'après l'expérience des dernières années, si la mortalité en Belgique a été soumise à des causes constantes ou variables. Je prendrai à cet effet les chiffres de la mortalité pour les neuf années de 1831 à 1839 inclusivement, et je les partagerai en trois groupes ou en trois périodes triennales, afin de mieux éliminer les effets des causes accidentelles. Je trouve ainsi :

De 1831 à 1833,	1	décès par	37,9	habitants.
1834 à 1836,	1	id.	39,7	id.
1837 à 1839,	1	id.	37,9	id.

La mortalité a été la même pour la première et la troisième période; mais elle a été moindre pendant la seconde, qui comprend les années 1834, 35 et 36. Si nous cherchons une cause à cette inégalité, nous la trouverons probablement

dans les prix des vivres. Pour nous en assurer, plaçons à côté du chiffre de la mortalité les prix du froment et du seigle, et nous ne perdrons pas de vue que l'influence de la disette ou de l'abondance ne se manifeste pas immédiatement, mais en général dans les chiffres de l'année suivante. En conséquence, en groupant les résultats par trois années, je prendrai les prix à partir de 1830 jusqu'en 1838.

PÉRIODE TRIENNALE.	MORTALITÉ.	PRIX DU	
		FROMENT blanc.	SEIGLE.
		fr. c.	fr. c.
1830 à 1832 . .	37,9	21 48	14 02
1833 à 1835 . .	39,7	13 99	9 10
1836 à 1838 . .	37,9	16 98	11 03

Nous voyons que, pendant les années 1833, 1834, 1835, les prix du froment et du seigle ont été moindres que pendant les deux autres périodes triennales. Il semblerait donc qu'effectivement la diminution de la mortalité, pendant cette même période, a eu pour cause la baisse du prix des grains.

Dans ces sortes de recherches, il convient de procéder avec beaucoup de circonspection, parce que l'on peut facilement déplacer les causes et attribuer à une circonstance ce qui appartient à une autre. Du reste on sait qu'une des causes les plus influentes sur la mortalité, se trouve dans la plus ou moins grande abondance des vivres, et dans la facilité qu'a le

peuple à s'en procurer. La disette de 1816 en offre un des exemples les plus frappants; cette année calamiteuse a laissé des traces profondes dans les listes de mortalité de l'année suivante, ainsi que dans les registres des mariages et des naissances.

L'influence des causes variables, fait naître en général, beaucoup de difficultés dans les recherches statistiques. On en trouve surtout des exemples dans les questions relatives à la population. Ainsi l'on compare assez souvent le mouvement d'une population stationnaire au mouvement d'une population croissante par un excès de naissances sur les décès. Votre Altesse conçoit cependant que l'on compare des éléments hétérogènes, et que, toutes choses égales, cette dernière population doit avoir une mortalité plus forte, parce qu'on y trouve plus d'enfants.

Votre Altesse reconnaîtra également que dans les pays où la population des villes augmente aux dépens de celle des campagnes, la mortalité doit être croissante, puisque la portion de la population qui s'est transportée des campagnes dans les villes s'est exposée à des dangers plus grands; il serait donc peu logique de comparer une pareille population, dans ses états successifs, puisqu'elle ne reste pas homogène d'une année à la suivante. De ce que les décès sont généralement plus nombreux dans les villes que dans les campagnes, il résulte aussi que deux populations habitant des pays différents, sont bien rarement comparables entre elles.

Les causes peuvent être variables de différentes manières, ai-je dit; et en effet les unes varient sans obéir à aucune loi apparente, et en échappant à toutes les prévisions; de ce nombre sont les années d'abondance et de disette, et toutes les années calamiteuses en général. D'autres subissent des variations dont on connait les lois; on peut les ranger en deux catégories principales : 1° les causes périodiques, comme les saisons; 2° les causes variables autour d'un état moyen; c'est-à-dire celles qui n'éprouvent que des mutations accidentelles. L'examen de ces deux genres de causes mérite une attention toute particulière; je compte m'en occuper successivement dans mes prochaines lettres.

LETTRE XXIX.

Des causes variables périodiques.

20 décembre 1842.

Parmi les faits variables qu'on observe à la surface de notre globe, les plus remarquables sont certainement ceux qui obéissent à des lois de périodicité. Les phénomènes qui tombent sous l'influence du temps, par exemple, sont profondément modifiés par la période diurne et par la période annuelle. Ces phénomènes, jusqu'à ce jour, ont été considérés isolément, et ont trouvé place dans les différentes branches des sciences, selon la spécialité des observateurs qui s'en occupaient. Votre Altesse conçoit cependant que cette espèce de morcellement doit arrêter les progrès de la science, et empêcher de saisir les liens généraux qui rattachent tous les phénomènes périodiques entre eux. Ainsi, la statistique a examiné avec une scrupuleuse attention l'influence des saisons sur la mortalité, sur les naissances, sur les crimes, sur l'aliénation mentale, sur les suicides, sur le mouvement du commerce, etc.; elle emprunte même à la météorologie des indications sur la température et les variations de l'at-

mosphère; à la médecine, elle demande les résultats de ses observations sur la nature et la gravité des maladies dans leurs rapports avec les différents mois de l'année. Elle reçoit des sciences naturelles et de l'agriculture des renseignements non moins précieux sur une foule de faits intéressants; mais presque toujours ces faits sont recueillis et classés dans des tableaux isolés; on n'a pas songé, que je sache, à les observer simultanément.

L'idée de combler cette lacune dans la science, m'a fait sentir depuis longtemps la nécessité d'établir une énumération aussi complète que possible de tous les phénomènes périodiques. J'ai cru qu'il serait utile de la soumettre aux savants, dans la vue de faire mieux ressortir l'importance d'une étude qui aurait pour objet, non-seulement de rechercher des lois générales encore peu connues, mais aussi de donner les moyens de mieux apprécier les climats et de les comparer entre eux.

J'ai été flatté de voir la proposition d'un pareil système d'observations accueillie favorablement par un grand nombre de sociétés savantes, et par quelques-uns des hommes les plus illustres de cette époque; j'aurai probablement l'occasion d'entretenir bientôt Votre Altesse des premiers succès obtenus dans cette croisade scientifique, que je prêche sous le patronage de notre académie, du moins pour la partie qui concerne les sciences naturelles et la physique du globe. Je ne veux cependant pas différer de mettre sous ses yeux la partie du rapport où je viens de rendre publiquement compte

des résultats que nous nous sommes proposé d'atteindre. Je copie textuellement :

« Si la vie produit chez des individus une série de phénomènes qui les modifient à chaque instant, et les diversifient entre eux, les saisons et les jours, par leur succession, n'exercent pas une influence moins remarquable, en modifiant simultanément et le globe entier et tous les êtres vivants qui le couvrent. Il semble que les *phénomènes périodiques naturels* constituent une vie commune en dehors de la vie individuelle; leur importance a souvent occupé les observateurs; mais ils ont généralement négligé de les étudier dans leur ensemble, et de chercher à saisir les lois de dépendance et de corrélation qui existent entre eux. C'est cette étude difficile que l'académie n'a pas craint d'entreprendre; on pourra juger bientôt si elle a eu tort d'avoir confiance dans ses propres forces et dans l'estime qu'on lui a témoignée à l'étranger. Depuis longtemps les recherches de la compagnie s'étaient dirigées vers l'étude des grands phénomènes atmosphériques; sans formuler encore le vaste plan qui devait l'occuper plus tard, elle avait senti qu'il convenait d'étudier, avant tout, le milieu dans lequel se trouvent plongés tous les êtres vivants. Aux phénomènes météorologiques vinrent se joindre naturellement ceux de la physique du globe. Une correspondance active, qui s'étendait au delà des limites de l'Europe, lui permit d'enregistrer soigneusement les événements les plus remarquables, tels que les aurores boréales, les tremblements de terre, les perturba-

tions magnétiques, les ouragans, les trombes, etc., et de juger ainsi des limites dans lesquelles ils se trouvent resserrés, soit par rapport au temps, soit par rapport à l'espace. Elle put reconnaître aussi les relations plus ou moins grandes qui existent entre eux, et mieux apprécier les causes qui leur donnent naissance. Mais aucune étude ne fixa plus sérieusement son attention que celle de la marche des ondes atmosphériques.....

» A l'étude des phénomènes périodiques de l'atmosphère se joignit celle des phénomènes périodiques relatifs aux plantes, aux animaux et à l'homme. Il n'est pas de personne si étrangère aux sciences naturelles, qui ne soit frappée de la magnificence avec laquelle la nature fait varier la physionomie de notre globe, selon les saisons et même selon les différents instants du jour. Cette succession de phénomènes, quand on l'observe attentivement, s'accomplit de la manière la plus régulière et avec la plus frappante harmonie. Si l'œil pouvait la saisir dans son ensemble, il verrait, à la suite des hivers, la végétation se développer progressivement, dans notre hémisphère, du Sud vers le Nord; et dérouler, pour ainsi dire, ses vagues verdoyantes, en reculant de jour en jour ses limites. Mais ces limites, quelles sont-elles? Quelle main assez hardie pourrait les tracer à la surface du globe? D'ailleurs, sont-elles annuellement les mêmes? Ne varient-elles pas selon la nature des plantes? Et quand les fleurs se développent à leur tour, comment se propagent ces ondes nouvelles d'une mer embaumée et diaprée de mille couleurs?

Quelles sont les modifications qu'elles subissent dans leur marche? Dans quel ordre naissent les fruits? Et les animaux divers qui se mêlent à ce brillant cortége, attendent-ils un signal naturel pour se montrer? Les oiseaux surtout suivent-ils constamment les mêmes routes en visitant nos climats, et leur existence se rattache-t-elle au retour des mêmes phénomènes? Que des questions diverses se présentent à la fois, et combien elles sont dignes d'échauffer l'imagination du naturaliste et d'occuper ses méditations *. »

Les sciences morales et politiques, de leur côté, présentent des problèmes non moins intéressants à notre curiosité. Je ne parle pas seulement de toutes les fluctuations que subit le mouvement de la population sous l'influence des différents mois de l'année, des altérations que l'on observe dans le physique de l'homme, même aux différents instants du jour; mais de la manière dont se trouvent affectés le moral et l'intelligence. Qui ne sait que les rigueurs de l'hiver, en multipliant les besoins, déterminent dans la société un plus grand nombre de crimes contre les propriétés; tandis qu'elles amortissent au contraire le feu des passions, qui se réveillent avec plus d'ardeur et de danger au retour du printemps et pendant les chaleurs de l'été; c'est alors qu'on voit éclater plus d'actes de violence, que la révolte s'organise et se répand avec plus de rapidité, que notre

* *Rapport sur les travaux de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, en* 1842, lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre de la même année.

intelligence, plus prompte à s'exalter, franchit les dernières limites de la raison. Singulière condition de l'homme et des sociétés, que les vertus et les vices, que les désordres du cœur et de l'intelligence, que les commotions politiques, soient influencés par le plus ou moins de distance du soleil à notre équateur, par le plus ou moins d'élévation de cet astre au-dessus de notre horizon!

Ces indications rapides suffiront, j'espère, pour justifier aux yeux de Votre Altesse tout le prix que j'attache à l'étude des phénomènes périodiques. Cette étude du reste présente de nombreuses difficultés, parce qu'à la cause dont on veut déterminer l'influence viennent souvent s'en mêler d'autres, qui compliquent les faits observés.

Quand on soupçonne l'existence d'une cause périodique simple, il devient assez facile de l'étudier, en comparant entre elles les différentes parties de la période supposée. Ainsi, veut-on reconnaître si la mortalité est influencée par la période annuelle, on comparera les résultats des différents mois de l'année. On trouvera que la mortalité subit, à environ six mois de distance, un *maximum* et un *minimum*. Dans nos climats, le *maximum* arrive en janvier et le *minimum* en juillet; entre ces termes, les autres nombres croissent ou décroissent régulièrement.

On peut facilement éliminer l'influence des causes périodiques, en faisant porter les moyennes que l'on compare sur la période tout entière. Ainsi, nous n'avons pas fait difficulté de comparer la mortalité d'une année à celle d'an-

nées différentes, bien que la mortalité variât considérablement pendant le cours de chacune d'elles. Il suffit que les fluctuations soient généralement les mêmes, et c'est en effet ce qui a lieu.

Si l'on n'avait pas les moyens de comparer les nombres appartenant à deux périodes complètes, on ne pourrait établir de comparaisons qu'entre les nombres qui appartiennent aux mêmes parties de la période. Ainsi, quand, pour un pays, on ne possèderait pas de renseignements sur les températures de deux années différentes, on pourrait néanmoins faire un rapprochement entre les températures de deux mêmes mois; ou bien, si l'on ne peut observer la température à différentes heures du jour, du moins que l'on observe toujours à la même heure; et les résultats que l'on obtiendra, permettront d'arriver encore à des conclusions intéressantes sur l'influence des saisons.

Les phénomènes périodiques qui s'accomplissent dans les limites d'un jour ou d'une année, ne sont pas les seuls qui doivent occuper notre attention; il en est d'autres, tels que celui des marées, qui sont plus particulièrement influencés par les révolutions lunaires; il en est aussi qui ont des limites indépendantes des causes astronomiques. Je n'en citerai qu'un seul, parce qu'il est à peu près inconnu, et que peut-être quelques physiciens seront portés à l'étudier avec plus de soin que je n'ai pu le faire avec un ami, à qui la science de l'optique doit les recherches les plus ingénieuses. Nous nous étions proposé, M. Plateau et moi, d'y revenir et

de l'étudier avec un soin tout particulier; mais j'ai lieu de craindre que nous ne puissions plus réaliser ce projet.

Voici en quoi consiste le phénomène. On sait que, quand on a fixé pendant quelque temps les yeux sur une couleur éclatante, et qu'on porte ensuite rapidement ses regards sur un fond blanc, on aperçoit la couleur *complémentaire* de celle qu'on a vue d'abord : ainsi, à l'impression de la couleur rouge qu'on aurait observée, succède celle du vert. Puis, cette couleur s'affaiblit, disparaît, et revient pour s'effacer encore, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'elle s'éteigne entièrement; de sorte que la couleur *complémentaire* est vue, non d'une manière continue, mais par intermittences. Pour faire ces expériences, l'un de nous regardait fixement, pendant un nombre déterminé de secondes, un morceau de papier orangé placé sur un fond noir, dans un lieu bien éclairé; puis, portait aussitôt les yeux sur un mur blanc. Il indiquait alors avec le plus de précision possible, les instants où l'impression accidentelle atteignait ses *maxima* successifs d'intensité; tandis que l'autre observateur, muni d'une montre à secondes, notait aussitôt les temps. L'effet produit, dans ces expériences, se bornait à des disparitions et réapparitions de l'impression accidentelle, sans retour de l'impression primitive. C'était l'intervalle de temps qui séparait les réapparitions successives qu'il s'agissait d'estimer. D'abord les périodes étaient-elles également longues? puis, étaient-elles également nombreuses?

Nous avons reconnu que le nombre des réapparitions

était d'autant plus grand, que nous avions regardé l'objet primitif pendant un temps plus long.

Nous avons remarqué encore, que si le temps pendant lequel on a regardé l'objet a de l'influence sur le nombre des réapparitions, il ne semble pas en avoir sur la durée de chacune d'elles.

En comparant nos résultats entre eux, nous avons trouvé que les réapparitions avaient des durées sensiblement égales pour les yeux de chacun de nous. Seulement, après avoir regardé l'objet pendant un temps assez long, et quand les réapparitions périodiques devenaient fréquentes, quelques réapparitions secondaires qui échappaient à l'un des observateurs, étaient vues par l'autre *.

Ces expériences, je le répète, ont été trop peu nombreuses, pour que les conclusions puissent être adoptées avec toute la confiance nécessaire. Mais ceux qui voudraient les reprendre, y trouveraient un exemple curieux pour apprécier les influences exercées sur la vue de chaque observateur, par le temps pendant lequel il a fixé les yeux sur la couleur soumise à l'expérience, par la nature de cette couleur, etc.

Les battements du pouls, les inspirations, certains exercices de l'homme et plusieurs de ses maladies, doivent également être rapportés aux phénomènes périodiques; mais,

* Pour plus de renseignements, voyez les notes au *Traité de la lumière* de sir J. Herschel, t. II, p. 521, traduct. de M. Verhulst avec notes de M. Quetelet.

en étendant trop mon sujet, je dois craindre de fatiguer Votre Altesse.

Je ne puis m'abstenir cependant de présenter quelques remarques générales qui ne seront peut-être pas sans intérêt. Je me bornerai à les énoncer :

1° Si toutes les causes qui agissent dans l'univers étaient constantes et uniformes, notre monde resterait dans un état invariable ; la vie partout serait éteinte, et aucun phénomène ne pourrait se manifester.

2° Si les causes n'étaient sujettes à varier qu'entre certaines limites, les phénomènes que nous observons devraient se reproduire un jour, et tout, dans la nature, serait soumis à la loi de périodicité. Toutefois, les plus simples combinaisons de causes donneraient lieu à des périodes d'une immense étendue.

3° Si les causes, au contraire, n'ont aucun caractère permanent ; si l'Être suprême a permis que les unes puissent s'éteindre pour faire place à d'autres, la périodicité n'est qu'accidentelle ; et rien n'est durable dans l'univers, du moins dans l'ordre des choses qui tombent sous l'influence des causes dont l'existence est limitée.

LETTRE XXX.

Sur les causes variables qu'on peut regarder comme constantes. — Loi des grands nombres.

Quand j'ai parlé du mode d'action des causes accidentelles, j'ai supposé qu'on avait à mesurer un individu dont la taille demeurait invariable pendant le cours des expériences. Cette invariabilité de la taille pouvait être considérée comme une cause constante qui ne devait modifier en rien la valeur des résultats.

Ces mêmes résultats ne seraient pas sensiblement altérés, lors même que la taille, pendant le cours des expériences, varierait autour d'un état moyen, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, c'est-à-dire sans que la variation fût progressive dans un sens déterminé. Cette manière d'être des causes est très-remarquable, parce que les exemples en sont fréquents dans la nature. Il existe en effet très-peu de causes qu'on puisse considérer comme étant absolument constantes.

Les petites variations qui altèrent une cause et qui ne s'exercent que dans des limites très-étroites, peuvent être regardées comme les effets de causes accidentelles

ajoutées aux autres causes accidentelles qui, déjà, pouvaient influer sur le résultat final. De sorte qu'en définitive, la cause variable peut être considérée comme constante, et les causes accidentelles, devenues plus nombreuses et plus variées, font osciller le résultat cherché entre des limites d'erreur plus larges. Je suppose que l'on jette en l'air une pièce d'argent pour obtenir au hasard pile ou croix, et qu'après 10000 épreuves on ait eu 6000 fois pile et 4000 fois croix. D'après ce que nous avons vu déjà, les causes favorables à l'arrivée de pile et de croix sont entre elles comme 6000 à 4000, ou comme 3 à 2. J'admets que les épreuves ont été assez nombreuses pour avoir détruit tous les effets des causes accidentelles, en sorte qu'on ne gagnerait rien ou peu de chose à prolonger les expériences, puisqu'elles amèneraient toujours à peu près identiquement le même rapport.

Votre Altesse se rappellera que c'est justement en cela que consiste le principe remarquable de Jacques Bernoulli. Cet habile géomètre avait employé une partie de sa vie à démontrer ce résultat, qui nous paraît si simple aujourd'hui, savoir : Que la moyenne donnée par une série d'expériences tombe près du nombre cherché, dans des limites d'autant plus étroites que les épreuves ont été plus multipliées. Toutes les propriétés qui découlent de ses savantes recherches constituent un des monuments les plus honorables à sa mémoire; mais Bernoulli a établi ses calculs dans l'hypothèse que le nombre cherché était fixe et constant.

Il peut arriver que cette quantité éprouve de petites variations, telles que celles dont j'ai parlé précédemment. Ainsi, dans l'exemple dont il vient d'être question, au lieu de répéter les épreuves avec une seule et même pièce d'argent, avec une pièce de cinq francs par exemple, on pourrait les faire avec des pièces différentes; il est évident que la chance relative à chaque nouvelle pièce de cinq francs devrait varier de l'une à l'autre; et au lieu d'avoir, pour l'arrivée de pile ou de croix, les probabilités respectives $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$, on en aurait qui varieraient légèrement en plus ou en moins autour des probabilités moyennes, déterminées par le mode de confection et par la substance des pièces. Or, le principe de Bernoulli est encore applicable dans ce cas, et c'est ce qui a été démontré par M. Poisson, au moyen d'une savante analyse. Heureusement, le secours du calcul ne nous est pas nécessaire, ici, pour concevoir que les petites variations qu'on trouve en passant d'une pièce à l'autre, peuvent être rangées parmi les effets de causes accidentelles qui s'effacent à la longue, quand on multiplie suffisamment les épreuves; en sorte que les résultats se présentent comme si l'on avait réellement fait les épreuves avec une même pièce.

Dans le cas qui nous occupe, les expériences doivent en général être très-multipliées: c'est par ce motif que M. Poisson a nommé *loi des grands nombres* l'extension du principe de Bernoulli.

Nous avons déjà eu l'occasion de considérer des exemples analogues, particulièrement quand il s'est agi des mesu-

res prises sur un grand nombre d'hommes du même âge. Nous avons vu alors que toutes les tailles réunies s'accordaient à donner une moyenne dont elles s'écartaient individuellement d'après une loi bien marquée, et absolument comme si un individu type avait été mesuré un grand nombre de fois par des moyens plus ou moins défectueux. Cette symétrie dans les résultats, n'existe et ne peut exister que pour autant que les éléments qui concourent à donner la moyenne, peuvent être ramenés à un même type.

Les mesures des poitrines des soldats écossais nous ont présenté un autre exemple de même nature; elles variaient en plus et en moins par rapport à leur moyenne commune, comme pourraient varier les différentes mesures prises sur une seule et même poitrine, mais par des moyens défectueux qui donnent lieu à de grandes chances d'erreurs.

Votre Altesse m'excusera, j'espère, de revenir encore sur les deux exemples cités précédemment; j'y attache d'autant plus de prix, qu'ils présentent, je crois, la première preuve mathématique qu'il existe véritablement un homme moyen, un homme type, du moins quant à la taille. Cette assertion avait été vivement contestée par quelques personnes; et je n'avais pas eu l'idée alors de soumettre mes nombres aux épreuves que je viens d'indiquer.

LETTRE XXXI.

De l'étude des causes et de la marche à suivre dans l'observation. On procède des faits généraux aux cas particuliers.

Dans les recherches statistiques, on a généralement pour objet de reconnaître les causes qui influent sur les faits sociaux et d'en déterminer le degré d'énergie. Ces appréciations, la dernière surtout, deviennent quelquefois impossibles; et l'on doit se borner à étudier les causes et leurs tendances.

La société n'est pas comme un instrument de physique, qu'on arrange ou qu'on dérange à son gré, pour l'étudier sous toutes ses faces, dans tous ses rouages et sous le jour le plus favorable. Malheur à qui tenterait de pareilles épreuves; on aurait lieu de plaindre un pays qui changerait à tout instant ses lois, ses habitudes et ses relations, pour reconnaître par l'expérience, la manière d'être qui lui convient le mieux. On ne peut donc pas, comme dans la plupart des sciences d'observation, rendre égales à volonté toutes les causes influentes moins une, pour étudier les effets et le mode d'action de cette dernière. Souvent, il faut procéder par d'autres voies; il faut substituer l'analyse à la synthèse,

et commencer par prendre le phénomène dans son état le plus général.

Remarquons, en premier lieu, qu'il est presque toujours possible d'écarter dans l'étude des phénomènes sociaux, comme dans ceux des phénomènes physiques, les effets des causes *accidentelles*, en faisant dépendre les résultats d'un nombre suffisant d'observations. C'est ainsi qu'en étudiant la mortalité de la Belgique, j'ai fait dépendre les résultats de nombres assez grands, pour que nous pussions croire que les effets des causes accidentelles se trouvaient éliminés.

Il est également possible d'écarter les effets des causes *variables périodiques*, en ne comparant entre eux que les résultats donnés par une période entière, ou par des parties correspondantes de la période. Ainsi, en étudiant la mortalité de la Belgique, j'établirais des comparaisons entre les résultats des années successives. A défaut des résultats de toute une année, je comparerais ceux de plusieurs hivers ou de plusieurs printemps successifs, parce que je suppose un rapport constant entre les nombres donnés par une même saison et ceux donnés par l'année entière.

Si, au lieu d'éliminer, nous voulons étudier les effets de la période, il faudra opérer d'une manière toute contraire : ce seront les nombres partiels des différentes divisions de la période qu'il faudra mettre en présence.

L'étude des *causes variables qui n'ont pas de périodicité*, est plus difficile. Ce qu'on a de mieux à faire, en pareil cas, c'est de comparer le résultat que l'on suppose influencé, à

plusieurs autres résultats semblables, obtenus pour d'autres années, afin de juger d'abord s'il y a des anomalies ou des écarts sensibles dans la succession de ces résultats. Quand un écart est en effet prononcé, il faut rechercher s'il offre une certaine périodicité ou s'il est fortuit. Enfin, il faut rapprocher le résultat que l'on suppose influencé, des causes qui peuvent l'avoir fait varier. Par exemple, j'ai montré, dans une de mes lettres précédentes, que la mortalité pendant les années 1835 et 1836 a été moindre que pendant les années voisines; j'ai pu croire que cette diminution dans les décès, tenait aux prix des subsistances, et, pour m'en assurer, j'ai rapproché des chiffres des décès pendant les dix années de 1831 à 1840, les prix du froment et du seigle. J'ai trouvé en effet que la marche de ces deux éléments statistiques a été à peu près parallèle. J'en ai conclu que la cause variable qui a produit une diminution de mortalité, était probablement due à la baisse du prix des grains.

Quand on veut étudier les causes *constantes*, il faut commencer par éliminer l'influence des causes accidentelles, et avoir égard aux causes variables, pour affranchir également de leurs effets les résultats sur lesquels on opère. C'est pour ces motifs que les recherches doivent porter de préférence sur des années complètes et qui ne forment pas anomalie.

La marche la plus sûre sera donc d'étudier d'abord le fait dans sa plus grande généralité, c'est-à-dire sous l'influence de toutes les causes constantes et variables; puis,

de toutes ces mêmes causes moins une, celle dont on cherche à reconnaître l'existence et les tendances. A cet effet, on groupera partiellement les nombres qui ont concouru à donner le résultat général, en les rassemblant de la manière la plus avantageuse pour constater l'influence que l'on suppose et son mode d'action.

Je vais tâcher maintenant de rendre sensible par un exemple ce que la théorie aurait de trop abstrait. Je prie seulement Votre Altesse de ne pas s'effrayer à la vue des chiffres que je serai forcé d'employer; ils sont, dans cette circonstance, mes auxiliaires obligés; mais je ne perdrai pas de vue qu'ils se trouvent toujours plus ou moins déplacés sur le terrain où je les fais intervenir, c'est assez dire que j'en userai sobrement.

Il est une question intéressante qui se rattache à plusieurs branches de nos connaissances, mais qui touche avant tout aux plus chères affections de l'homme, c'est celle des mort-nés. Si cette question n'a pas été examinée encore avec toute l'attention qu'elle mérite, ce n'est pas qu'elle ait été perdue de vue par les hommes de science ou par les hommes d'état; les mystères qui l'entourent tiennent plutôt au manque de bonnes observations.

Les lacunes qui existent à cet égard, sont dues en partie à ce que les déclarations exigées par la loi ne se font pas, ou ne se font que d'une manière très-irrégulière. On confond d'ailleurs très-souvent les mort-nés avec les enfants avortés. La loi même n'est pas suffisamment précise; il y a plus, dans

un grand nombre de pays civilisés, les lois gardent le silence le plus absolu au sujet des mort-nés.

Depuis quelques années, le gouvernement Belge a donné un soin tout particulier à mettre de l'uniformité et de l'exactitude dans cette partie intéressante de la statistique: les renseignements qui ont été recueillis, pendant les trois dernières années, nous permettront déjà d'en déduire des notions plus exactes que celles que l'on possédait jusqu'à présent.

Je commencerai par mettre sous les yeux de Votre Altesse les chiffres généraux.

ANNÉES.	NOMB. DES MORT-NÉS DES DEUX SEXES EN BELGIQUE.						TOTAL général.
	VILLES.			COMMUNES RURALES.			
	Masculin.	Féminin.	Rapport.	Masculin.	Féminin.	Rapport.	
1841	1220	949	1,29	1976	1387	1,43	5532
1842	1205	915	1,32	1939	1415	1,37	5474
1843	1296	934	1,39	2073	1456	1,42	5759
MOYENNE . .	1240	933	1,33	1996	1419	1,41	5588

La Belgique a donc compté annuellement 5588 mort-nés. Je pense que nous pouvons accepter ce nombre comme étant suffisamment dégagé des effets des petites causes accidentelles qui auraient pu altérer sa valeur; il diffère en effet très-peu des nombres qui ont été donnés par chaque année individuellement.

Les observations recueillies dans les communes rurales,

celles mêmes données par les villes, paraissent également assez nombreuses, pour qu'on puisse considérer les effets des causes accidentelles, comme éliminés des résultats. Cette remarque s'étend même aux nombres qui établissent la distinction des sexes.

Cette fixité dans le chiffre des mort-nés est un premier fait qui me paraît très-remarquable; il tend à montrer déjà qu'il est le résultat de causes bien déterminées.

Ces causes sont-elles constantes ou variables? Pendant les trois années qui viennent de s'écouler, elles paraissent avoir agi d'une manière constante. Cependant les différents chiffres de 1843 sont les plus grands, quelle que soit la distinction que l'on établisse. Cette augmentation, faible à la vérité, doit avoir une cause; je crois la trouver dans les soins que l'on a pris, pendant cette année, à constater le chiffre des mort-nés avec plus d'exactitude encore qu'auparavant.

Votre Altesse remarquera, et ce point est essentiel, que je suis loin de regarder la moyenne 5588 comme représentant rigoureusement le nombre annuel des mort-nés, bien que j'admette qu'elle n'est plus sensiblement influencée par les causes accidentelles. Je crois au contraire ce nombre un peu trop faible, à cause de réticences ou de négligences dans les inscriptions.

Or, les négligences, dans les affaires administratives, ne se font point fortuitement. On peut les regarder comme des causes constantes, ou tout au moins comme des causes variables qui exercent une action bien prononcée sur les ré-

sultats généraux. Ne sait-on pas que la poste reçoit, chaque année, à peu près exactement le même nombre de lettres qu'on a oublié de cacheter, ou dont les adresses sont insuffisantes? ne voit-on pas la même régularité dans les contraventions de police?

Je ne prendrai donc la moyenne 5588 que comme représentant d'une manière approximative le nombre absolu des mort-nés. En la rapprochant du chiffre de la population, qui était, à la fin de 1842, de 4,172,664 habitants, je trouve annuellement 1 mort-né par 747 habitants.

Il se présente ici une autre remarque bien intéressante, il me semble : c'est que les chiffres des mort-nés, bien que défectueux dans le sens absolu, peuvent néanmoins donner des rapports très-exacts quand on les compare entre eux. Je m'explique : si l'on voulait connaître l'influence des sexes sur les mort-nés, il importerait peu que les deux nombres que l'on compare fussent, chacun, trop grand ou trop petit; il suffit d'avoir la conviction qu'ils sont altérés, chacun dans un même rapport; et dès lors le résultat de leur comparaison est dégagé de cette cause d'erreur. Or, tout porte à croire en effet que les réticences et les négligences dans les inscriptions, portent indifféremment sur les deux sexes.

Quand on compare les mort-nés masculins et féminins, le rapport est de 1,33 à 1 dans les villes et de 1,41 à 1 dans les campagnes. Les mort-nés du sexe masculin sont donc comparativement plus nombreux; toutefois l'inégalité est un peu moindre dans les villes que dans les campagnes. Est-elle

accidentelle seulement? Pour le savoir, il faudrait consulter les observations d'un plus grand nombre d'années.

D'après celles des trois années précédentes, il serait difficile de se prononcer; parce que la faiblesse des nombres exerce trop d'influence sur les variations des rapports.

Remarquons, en passant, que des observations qui sont suffisamment nombreuses pour déterminer les actions d'un certain genre de causes, peuvent ne pas être suffisantes pour reconnaître, avec un égal degré de précision, les actions d'une autre nature.

Nous pouvons apprécier d'une manière plus sûre, et par une autre voie, si la différence de séjour des villes ou des campagnes a fait varier sur le nombre même des mort-nés.

Dans la nouvelle recherche que je me propose de faire, je prendrai pour terme de comparaison les naissances. Ce dernier élément est un des plus précis de l'état civil, du moins en Belgique. Je mettrai donc en présence des enfants nés vivants, les mort-nés des villes et des campagnes.

ANNÉES.	RAPPORT DES NAISSANCES AUX MORT-NÉS EN BELGIQUE.					
	DANS LES VILLES.			DANS LES COMMUNES RURALES.		
	Enfants nés vivants.	Mort-nés.	Rapport.	Enfants nés vivants.	Mort-nés.	Rapport.
1841	35053	2169	16,2	103082	3363	30,6
1842	35156	2120	16,6	99671	3354	29,8
1843	34817	2230	15,6	98094	3329	28,9
MOYENNE . . .	35009	2173	16,1	100349	3415	29,4

Ce tableau peut donner lieu à de tristes réflexions : nous voyons en effet que le nombre des mort-nés dans les villes est comparativement double à peu près de celui des campagnes, et cette différence n'est pas accidentelle, elle s'est reproduite, chaque année, à peu près avec la même valeur. Quelle peut être la cause de cet affligeant tribut prélevé sur les villes? Proviendrait-elle d'une négligence plus grande dans les campagnes pour l'inscription des mort-nés? Je crois qu'il peut en effet exister une inégalité de ce chef; mais elle ne serait certes pas aussi forte. Devons-nous l'attribuer aux dissipations et aux dépravations des villes, à la gêne des vêtements? je m'abstiendrai de prononcer.

Les causes morales influent peut-être sur cette inégalité plus encore que les causes physiques. Je puis en donner un exemple dans la comparaison que j'établirai entre les enfants nés vivants et les mort-nés, en faisant la distinction des naissances légitimes et des naissances illégitimes. Voici ce que nous apprennent les documents statistiques.

ANNÉES.	RAPPORT DES ENFANTS NÉS VIVANTS, AUX MORT-NÉS EN BELGIQUE.					
	NAISSANCES LÉGIT.		RAPPORT.	NAISSANCES ILLÉGIT.		RAPPORT.
	Enfants nés vivants.	Mort-nés.		Enfants nés vivants.	Mort-nés.	
1841. . . .	128781	4991	25.8	9354	541	17.3
1842. . . .	125841	4883	25.7	9180	591	15.5
1843. . . .	123603	5125	24.1	9308	634	14.7
MOYENNE . .	126075	5000	25.2	9283	589	15.

Il existe donc une grande différence dans le nombre des mort-nés, considérés sous le rapport de la légitimité des naissances; le rapport est de 25 à 15 environ, ou de 5 à 3. On n'en saurait malheureusement douter, et les chiffres que je viens de citer en font foi, l'immoralité et la misère sont des causes destructives qui frappent l'homme avant même qu'il ait pu voir le jour.

Le résultat qui précède peut nous expliquer, au moins en partie, la différence que nous avons remarquée entre les villes et les campagnes, sous le rapport des mort-nés. On sait en effet que, dans les villes, les naissances illégitimes sont beaucoup plus nombreuses que dans les campagnes : ce rapport, toutes choses égales d'ailleurs, est annuellement de 23 à 7. Par suite, le nombre des mort-nés doit y être également plus considérable.

Dans les différentes comparaisons que je viens d'établir, j'ai pris soin d'éliminer l'influence des causes périodiques annuelles, en ne comparant entre eux que des résultats donnés par une année entière. Si je voulais déterminer l'influence de ces mêmes causes, je rapprocherais au contraire les résultats donnés par chaque mois individuellement. Le tableau suivant permettra de faire ces comparaisons. Les trois premières colonnes de chiffres font connaître, par mois, le nombre des mort-nés qui ont été inscrits en Belgique, pendant les années 1841, 1842 et 1843; ces données sont extraites des publications officielles *sur le mouvement de l'état civil*, que fait annuellement le ministère de l'intérieur.

ANNÉES.	NOMBRE DES MORT-NÉS PAR MOIS, EN BELGIQUE.				
	1841.	1842.	1843.	TOTAL.	PAR 30 JOURS.
Janvier. . .	481	541	548	1570	507
Février. . .	467	458	499	1424	508
Mars. . . .	506	550	559	1615	521 *max.*
Avril. . . .	504	489	487	1480	493
Mai	472	443	479	1394	450
Juin	392	401	386	1179	393 *min.*
Juillet . . .	430	422	418	1270	410
Août. . . .	435	408	458	1301	420
Septembre .	439	399	439	1277	426
Octobre. . .	437	432	485	1354	436
Novembre .	461	417	476	1354	451
Décembre .	508	514	525	1547	499
L'ANNÉE. . .	5532	5474	5759	16765	460

Les nombres de chaque année individuellement montrent à la vérité que l'on compte moins de mort-nés en été, et qu'il s'en trouve au contraire davantage en décembre et pendant les mois qui suivent; mais on n'entrevoit que confusément une loi qui lie ces nombres entre eux. Cet inconvénient tient principalement à deux causes :

1° Les observations ne sont pas assez nombreuses;

2° Les mois sont d'inégale longueur.

Or, pour avoir égard aux influences de ces deux causes, j'ai commencé par additionner les nombres fournis par les trois années, et j'ai placé les sommes dans l'avant-dernière colonne du tableau précédent. Ces sommes m'ont permis

de calculer les nombres de la dernière colonne, où tous les mois sont supposés être également de 30 jours.

Cette dernière colonne, on ne saurait le méconnaître, indique bien certainement une périodicité : le plus grand nombre de mort-nés a été compté au mois de mars; ce nombre a diminué jusqu'en juin, qui présente un *minimum;* et il croît ensuite pour atteindre le *maximum* de mars.

La loi de mortalité est ici à peu près exactement ce qu'elle est pour l'enfant après la naissance. J'ai fait voir ailleurs, et MM. Edwards et Villermé l'avaient déjà reconnu avant moi, que les chaleurs de l'été causent un léger accroissement de mortalité chez les nouveau-nés; de sorte que le *minimum* qui, pour les autres âges, arrive généralement en juillet, se trouve masqué, ou plutôt se déplace et arrive dès le mois de juin.

L'excès des froids, comme celui des chaleurs, est donc funeste à l'enfant vers l'époque de sa naissance ; l'excès du froid surtout exerce sa fatale influence sur toute notre vie. Singulière condition de l'espèce humaine! notre frêle existence est soumise à toutes les vicissitudes des températures; et le sein même d'une mère ne peut servir d'abri contre la mort.

Tous les résultats qui précèdent confirment pleinement ceux auxquels j'étais déjà parvenu dans mon *Essai de physique sociale*, avant 1835, et ceux qu'avait obtenus M. le docteur Casper pour la monarchie prussienne. Seulement ils déterminent d'une manière plus précise la grandeur des

rapports calculés d'après le peu de renseignements que j'avais pu recueillir. L'influence des sexes, celle des villes et des campagnes, celle des naissances légitimes et illégitimes, celle enfin des saisons, conservent dans leurs déterminations à peu près les mêmes valeurs. Je rappelle ces circonstances parce qu'elles tendent à prouver que les résultats précédents ne sont point particuliers à la Belgique, mais qu'ils ont un caractère de généralité qui leur donne plus d'importance.

LETTRE XXXII.

De l'étude des causes. On procède du fait particulier au fait général. De la floraison.

27 mars 1845.

Ce matin j'arrêtais avec tristesse mes regards sur mon jardin; à travers mes vitraux couverts de givre, je voyais les arbustes ployer sous le poids de la neige. La nature froide et morte semblait enveloppée d'un vaste linceul; cependant je me rappelle qu'à pareille époque, j'ai vu déjà plusieurs fois les premières fleurs printanières entr'ouvrir leurs corolles, et la verdure orner ces pelouses encore durcies par les glaçons.

Plus heureuse que la Belgique, déjà sans doute l'Italie a vu s'épanouir le crocus et la primevère; cet océan de verdure et de fleurs dont elle se couvre, étendra progressivement ses vagues jusque dans nos régions; car, malgré les causes qui l'entravent, sa marche est tout aussi réglée que celle de cet autre océan qui baigne nos côtes.

La fleur même, si modeste qu'elle soit, n'est pas le produit d'un caprice de la nature; son frêle tissu exige des conditions favorables pour se développer; et, pour arriver à son complet épanouissement, elle suit des lois aussi sta-

bles que celles qui président à la marche des mondes.

Si notre œil était assez pénétrant pour embrasser la succession des phénomènes qui s'accomplissent, je ne dis pas dans une plante, mais dans l'ensemble des plantes, dans toute la végétation qui se déploie périodiquement à la surface de notre planète, nous serions sans doute étonnés de l'harmonie et de la régularité avec laquelle les mêmes phénomènes se reproduisent. Cette étude m'a toujours séduit; et si mes connaissances ne me permettent pas de rechercher les lois qui dominent les grandes métamorphoses auxquelles notre globe est soumis, j'ai tâché de reconnaître au moins les rapports qui existent entre quelques-uns de ces phénomènes et les causes principales dont ils dépendent.

Cette étude n'est pas nouvelle, et le célèbre Linnée surtout y avait appliqué toutes les forces de son intelligence et de sa brillante imagination. Il avait compris que, pour saisir le phénomène dans son ensemble, il faut l'étudier simultanément sur un grand nombre de points, et il avait fait un appel à ses amis; mais il est bien difficile d'obtenir des hommes un concours de travaux qui doivent embrasser une longue période et dont les fruits seront tardifs. Linnée fit ce qu'on pouvait attendre d'une organisation aussi puissante; il produisit le calendrier et l'horloge de flore; mais il laissa encore enveloppés de nuages les liens mystérieux qui existent entre les différentes époques naturelles des plantes et les éléments qui agissent le plus directement pour les faire naître.

On sait que la floraison, par exemple, est fortement influencée par la température; que ce phénomène dépend aussi de la nature, de l'âge, de l'exposition de la plante, de la quantité de lumière, de l'humidité de l'air, de l'état du ciel, des vents et d'une infinité d'autres causes; mais on n'a pas encore réussi à faire la part d'influence de chacune de ces causes. Cette recherche reste à faire.

L'intérêt qu'elle doit inspirer à Votre Altesse me servira sans doute d'excuse, si j'essaie la marche à suivre pour se diriger avec quelque chance de succès, à travers ce labyrinthe, où tant de fils viennent se croiser. C'est d'ailleurs un des plus beaux exemples que je puisse choisir pour servir de développement à mes idées.

Le point essentiel est de reconnaître d'abord quelles sont les causes qui peuvent avoir de l'influence sur le phénomène de la floraison: si je devais en faire une énumération complète, peut-être faudrait-il renoncer entièrement à ce genre de recherches; mais je puis me borner ici à considérer les causes prédominantes, comme cela se pratique dans les sciences physiques, sauf à revenir ensuite aux causes secondaires, que je croirai pouvoir négliger dans une première recherche.

Dans une lettre précédente, j'ai procédé par voie d'analyse pour arriver à la connaissance de la vérité; je crois qu'il sera préférable, ici, d'employer la synthèse et d'étudier le phénomène sous sa forme la plus simple, pour m'élever graduellement au cas le plus général.

Je range en quatre classes principales les causes qui peuvent influer sur la floraison de la plante :

Les *causes géographiques*, telles que la latitude, la longitude et l'altitude;

Les *causes locales*, telles que la nature du sol, l'exposition, la quantité de lumière;

Les *causes individuelles*, telles que l'âge et la vigueur de la plante ;

Les *causes météorologiques*, telles que la température, la nature des vents, l'humidité de l'air, la quantité de pluie, l'état du ciel.

Il serait bien difficile d'étudier toutes ces causes simultanément et de reconnaître la part d'influence qui revient à chacune d'elles. Le moyen le plus sûr sera de procéder du simple au composé.

Remarquons d'abord que nous pouvons éliminer les effets des causes qui appartiennent aux trois premières catégories, en observant toujours les mêmes plantes sur un même point du globe, dans une même exposition et dans un même terrain; les différences qui surviendront dans les époques de la feuillaison, de la floraison, de la maturité des fruits ou de la défeuillaison, quand on aura rendu ainsi toutes les autres circonstances égales, ne pourront provenir que des causes météorologiques.

Je supposerai, de plus, que c'est le même observateur qui suit le développement des plantes, et prend soin d'enregistrer leurs époques naturelles; plusieurs observateurs verraient

sans doute de différentes manières, et l'un aurait une propension à marquer l'époque de la floraison plus tard qu'un autre. Cette différence, qu'on pourrait nommer l'*équation personnelle des observateurs*, serait une nouvelle cause d'erreur, dont il faudrait tenir compte.

J'admettrai donc que toutes les précautions ont été prises pour rendre aussi égales que possible toutes les causes en général, autres que les causes météorologiques, qui peuvent différencier les phénomènes de la végétation. Ces conditions ne sont pas bien difficiles à remplir, puisqu'il me suffira d'observer les mêmes plantes, dans le même lieu et dans la même exposition, pendant plusieurs années consécutives, afin d'éliminer par la répétition les effets des causes fortuites; j'aurai soin d'enregistrer en même temps l'état météorologique de l'air, dont je veux déterminer l'influence.

Il est bien évident d'abord que si les circonstances atmosphériques restaient, tous les ans, exactement les mêmes, les plantes se couvriraient de feuilles, fleuriraient, produiraient leurs fruits et perdraient leurs feuilles chacune respectivement à la même époque de l'année, puisque, les causes restant identiquement les mêmes, les effets seraient invariables; mais les circonstances atmosphériques éprouvant des modifications très-sensibles d'une année à l'autre, les époques naturelles des plantes en éprouveront également; ce sont ces modifications que nous étudierons d'abord.

Quand nous aurons porté cette étude aussi loin que possible, et que nous aurons déterminé la part qui revient

à chacun des éléments météorologiques, nous serons en état d'établir, pour chaque plante, le jour de sa feuillaison, de sa floraison, etc., en supposant une année normale dans la localité où nous aurons observé. En d'autres mots, nous pourrons éliminer les effets des causes météorologiques.

Si, au lieu de nous borner à prendre un seul individu de chaque espèce, nous en avions pris plusieurs, placés dans des terrains et dans des expositions différentes, nous aurions pu déterminer les influences des *causes locales*. La différence d'exposition au soleil ou à l'ombre, au nord ou au midi, dans un terrain sec ou humide, etc., aurait produit une inégalité dans l'époque de la floraison de chaque plante. Cette inégalité, répétée chaque année, nous donne le moyen de déterminer les causes locales.

J'ai supposé que toutes les plantes qui ont servi aux observations précédentes, étaient également saines, également âgées, également vigoureuses, enfin que toutes les *causes individuelles* étaient les mêmes; mais en supposant que ces conditions n'existent pas, on peut déterminer l'influence de ces causes individuelles. On observerait dans le même terrain, dans la même exposition et dans des circonstances absolument semblables, des plantes de même espèce, différentes soit par l'âge seulement, soit par la vigueur, soit par d'autres caractères.

L'étude des causes géographiques est tout aussi facile en théorie; mais elle offre de grandes difficultés dans la prati-

que; d'abord parce qu'il faut employer des observateurs différents, qui bien rarement verront exactement de la même manière; d'une autre part, il y aura à peu près impossibilité d'observer sur des individus parfaitement semblables, quant à l'âge et à la force; de trouver les mêmes terrains, les mêmes expositions. Il faudra donc, par des calculs préalables, tenir compte des causes météorologiques, locales et individuelles, pour arriver enfin à des résultats comparables entre eux, ou qui du moins ne soient plus influencés que par les causes géographiques.

Ma manière de procéder, ici, diffère de celle que j'ai indiquée dans mes lettres précédentes. Je commence par observer le fait dans sa forme la plus simple, en tâchant de rendre toutes les causes influentes égales entre elles, hormis celles que je veux étudier. Puis, ayant reconnu l'influence de celles-ci, j'élimine leurs effets dans des observations ultérieures, où je rends inégales à leur tour des causes que j'avais rendues égales d'abord. En procédant ainsi du simple au composé, j'arrive finalement à déterminer l'influence des causes qu'il ne dépend pas de moi de rendre égales, telles que l'altitude, la latitude, le voisinage où l'éloignement des mers, etc.

Dans les faits statistiques au contraire, comme nous l'avons vu, on prend communément la question à étudier dans toute sa généralité, et l'on descend du composé au simple.

Mais je ne veux pas m'en tenir à des généralités pour ce qui concerne l'étude des époques naturelles des plantes. Cette étude est trop intéressante pour que nous ne cher-

chions pas à l'entamer au moins par ses côtés les plus abordables. Je ne me fais pas illusion sur les difficultés qu'elle présente, mais je crois qu'on peut les surmonter. Je demanderai à Votre Altesse la permission de l'entretenir, dans une prochaine lettre, des applications qu'on peut faire de la méthode d'observation que j'ai tâché d'esquisser.

LETTRE XXXIII.

Suite de l'étude des causes. Floraison.

Je me propose de remplir aujourd'hui l'engagement que j'ai pris en terminant ma dernière lettre.

Je commencerai par réduire la question à sa forme la plus simple; je supposerai qu'on veut déterminer l'époque de la floraison d'un arbuste bien connu, et sur l'espèce duquel il ne puisse pas y avoir de méprise. Cette condition est essentielle, surtout si l'on cherche à établir des comparaisons. Il importe aussi de choisir un arbuste qui croisse par toute l'Europe et que l'on rencontre facilement.

Sous ces différents rapports, le lilas (*Syringa vulgaris*) répondra parfaitement à mes vues. Il fait l'ornement des jardins; et, dans les campagnes, il se sépare rarement des habitations, même les plus modestes.

Quand la curiosité et le goût de la botanique m'ont porté à m'occuper du phénomène de la floraison, j'ai compris que le lilas devait surtout attirer mon attention; j'ai compris également que je ne pouvais pas m'en rapporter à d'autres pour prendre des annotations qui, probablement, n'auraient

pas été comparables aux miennes. Je marque comme jour de la floraison, celui où la première corolle s'épanouit et laisse apercevoir les étamines, à moins que l'épanouissement ne soit un cas tout à fait extraordinaire, ce que l'état de la plante indiquera suffisamment.

Le lieu où j'observe est le jardin de l'observatoire; son étendue et la distance qui le sépare des maisons les plus voisines, le rendent très-favorable à ce genre d'observation. Le terrain, généralement assez sec, est presqu'au sommet de la colline où se trouve Bruxelles, à une hauteur de 59 mètres environ au-dessus du niveau de la mer.

Ces différents détails sont nécessaires, si l'on veut tenir compte de toutes les causes qui peuvent influencer le phénomène. Je dois ajouter encore que les lilas sont assez nombreux dans le jardin de l'observatoire, et que leur âge peut être moyennement d'une douzaine d'années. Ceux qui reçoivent plus directement les rayons du soleil, sont aussi les premiers à se couvrir de fleurs. Je n'ai pas remarqué du reste qu'une partie du jardin, excepté celle immédiatement au nord du bâtiment, fût moins hâtive que l'autre. Généralement la floraison s'opérait le même jour sur plusieurs individus à la fois.

Mes premières observations sur la végétation datent du commencement de 1850; en sorte que j'ai pu voir déjà six fois la floraison du lilas, et enregistrer les dates auxquelles les premières fleurs se sont épanouies. Votre Altesse trouvera, dans le tableau suivant, les résultats qui m'ont été donnés par l'observation de cet arbuste.

Époque de la floraison du lilas à Bruxelles.

1839, le 10 mai.
1840, le 28 avril.
1841, le 24 id.
1842, le 28 id.
1843, le 20 id.
1844, le 25 id.

Moyenne. 27,5 avril.

C'est donc du 27 au 28 avril que le lilas fleurit à Bruxelles. En 1839, il y avait un retard de 12 jours; en 1843, au contraire, l'avance était de 8 jours, la différence entre ces deux époques extrêmes est de 20 jours. La détermination comporte bien quelque incertitude; je l'estime de deux à trois jours au plus pour le lilas.

Maintenant quelles sont les causes qui ont pu produire les différences que nous remarquons? Ces causes ne peuvent être déduites que des circonstances météorologiques, puisque toutes les autres circonstances qui modifient généralement la végétation, étaient les mêmes.

Parmi les influences météorologiques on s'est accordé à ranger en première ligne celle de la température. Aussi est-ce vers l'étude de cette cause que les observateurs ont d'abord porté les yeux. Réaumur, le premier, je crois, eut l'idée de faire la somme des températures pour arriver jusqu'au jour où un phénomène végétal devait s'accomplir [1]. Le père Cotte suivit cette inspiration; et dans ses

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1735, page 550, et le *Traité de météorologie* du P. Cotte, page 424.

idées, l'épanouissement d'une fleur était le résultat des températures auxquelles la plante avait été soumise auparavant. Du reste, l'époque qui lui servait de point de départ, était tout à fait artificielle; il comptait à partir du 1er avril. Il suffirait de se transporter, par la pensée, dans l'hémisphère austral, pour comprendre ce que cette époque a de valeur réelle.

Une autre objection, non moins fondée, que l'on peut faire à cette manière de compter, c'est que tous les degrés du thermomètre ont la même valeur, qu'ils appartiennent à des jours chauds ou à des jours froids. Trois jours d'une température de huit degrés centigrades, au mois de juin par exemple, produiraient le même effet qu'un seul jour de vingt-quatre degrés de température. Mais ces trois jours froids se succédant au moment où la séve est dans toute son activité, retarderont plutôt la végétation, tandis qu'une température de vingt-quatre degrés lui donnera une nouvelle force et fera épanouir un grand nombre de fleurs.

Malgré les objections qu'on peut y faire, l'idée de Réaumur est ingénieuse, et s'écarte sans doute peu de la vérité. C'est avec raison que cet habile physicien accordait à la chaleur la plus grande part dans le phénomène de la végétation, et que, dans une première recherche, il s'attachait à déterminer cette cause influente, sauf à reconnaître ensuite les autres et à en apprécier les effets.

C'est donc à la détermination de l'influence des températures sur la floraison, que nous devons nous attacher d'abord.

A cet effet, nous tâcherons de substituer au point de départ de l'abbé Cotte, une époque naturelle, c'est-à-dire une époque marquée par la nature elle-même. Après bien des essais, j'ai cru devoir choisir l'instant où la plante sort de son sommeil hivernal et où la séve commence à circuler. Je fixe cet instant à la fin des dernières gelées de l'hiver, et de la manière suivante, pour les six années 1839 à 1844.

En 1839, le 14 mars.
1840, le 3 id.
1841, le 2 id.
1842, le 27 janvier.
1843, le 25 id.
1844, le 25 id.

Il arrive quelquefois que de fortes gelées reprennent, quand la séve a commencé à circuler, et qu'elles détruisent les petites feuilles et les fleurs qui s'étaient développées. Si ces gelées se prolongent, les plantes rentrent dans leur sommeil hivernal, et le point de départ se trouve reculé.

Ce point mérite d'être fixé avec le plus grand soin; je ferai connaitre tout à l'heure un moyen de le constater peut-être plus exactement que par la cessation des gelées continues.

J'ai déjà dit ce qui me porte à regarder comme fautif le procédé par lequel Cotte et les botanistes qui l'ont suivi, calculent les époques de la floraison. La force exercée par la température est de la nature des forces vives; c'est par la somme des carrés des degrés, et non par la simple somme

des degrés qu'il faut apprécier son action. Pour mettre ma conjecture à l'épreuve, j'ai formé deux tables, pour chacune des années d'observation, l'une contenant la somme des températures, et l'autre la somme des carrés des mêmes températures, à partir de l'époque fixe dont il a été question précédemment. J'ai trouvé, en comparant ces deux tables, qu'il faut moyennement 462 degrés de température pour produire la floraison du lilas, d'après les idées de Cotte, et une somme de 4264 degrés carrés, d'après ma manière de compter.

En admettant ces nombres, et en cherchant les dates auxquelles ils correspondent dans mes deux tables, calculées comme je l'ai dit précédemment, je trouve, pour époques de la floraison :

ÉPOQUES.	D'APRÈS LA MÉTHODE DE COTTE.	D'APRÈS LA MÉTHODE DES CARRÉS des TEMPÉRAT.	D'après L'OBSERVAT.
En 1839.	10,5 mai.	9,3 mai.	10 mai.
1840.	4,0 »	2,2 »	28 avril.
1841.	23,5 avril.	23,0 avril.	24 »
1842.	22,5 »	27,3 »	28 »
1843.	19,5 »	19,7 »	20 »
1844.	22,0 »	23.5 »	25 »
MOYENNE. . .	27,0 avril.	27,5 avril.	2,75 avril.

Ces nombres s'accordent assez bien avec les nombres observés, pour laisser la question indécise. Cependant la méthode

que je propose, donne des valeurs plus satisfaisantes, surtout pour l'année 1842. Comme une seule plante ne saurait résoudre la difficulté, mes observations ont dû porter nécessairement sur un grand nombre de plantes, et je pense que l'ensemble des résultats ne peut laisser aucun doute.

Les plus grands écarts, en calculant par la seconde méthode, restent généralement dans les limites des erreurs probables.

En admettant le nombre 4264 comme celui qui correspond à l'époque de la floraison du lilas, on peut, en soustrayant les carrés des températures de tous les jours qui précèdent, remonter jusqu'à l'époque du réveil.

Si les plantes n'étaient soumises, pour la floraison, qu'à l'action de la température, il faudrait attacher à chacune d'elles un nombre analogue à 4264, qui déterminerait l'instant de sa floraison, soit dans une serre, soit dans une région quelconque du globe. Ce serait sa *constante*.

Supposons que nous ayons en effet bien déterminé le mode d'action de la température, et que nous puissions tenir compte de son influence, nous saurions quelle correction devrait subir chacune des six dates précédemment énoncées. Or, si la température était seule influente, il arriverait qu'après la correction faite, les dates devraient devenir identiquement les mêmes, ou du moins ne différer que dans les limites que comportent les incertitudes de l'observation. En admettant qu'elles soient effectivement dans ces limites, il deviendra très-difficile, à moins d'avoir un nombre considérable d'observations, de déterminer les actions des

autres causes influentes, puisque ces actions se perdraient dans les effets des causes accidentelles.

Si, au contraire, après avoir fait subir aux dates les corrections exigées par les températures, on trouve encore des différences qui ne peuvent être justifiées par les erreurs des observations, il faudra chercher à les expliquer par l'influence des vents, la quantité de pluie, l'état du ciel ou d'autres causes météorologiques. Or, en faisant usage des observations que j'ai pu recueillir, je trouve que la seule correction pour la température suffit pour ramener l'époque calculée de la floraison entre les limites que comportent les incertitudes de l'observation; il serait donc inutile de chercher, pour le moment, à aller plus loin.

Il est très-facile de tenir compte des causes *locales;* il suffit de placer, dans des terrains et dans des expositions différentes, des plantes de même espèce, de même âge, aussi semblables que possible, et de les observer simultanément dans leur développement.

De même pour les causes *individuelles*, on placera dans un même terrain et dans une même exposition, des plantes de même espèce, mais différentes d'âge, de variété, de vigueur.

Les influences de ces diverses causes peuvent être déterminées d'une manière d'autant plus sûre, que les erreurs de l'équation personnelle ne viennent pas s'y mêler.

Il n'en est plus de même quand il s'agit de déterminer les influences des causes *géographiques :* le phénomène se complique par l'impossibilité où l'on est de séparer les diffé-

rentes sources d'erreur. Ainsi, dans une même ville, on peut avoir des résultats très-dissemblables, en cherchant à déterminer l'époque de la floraison d'une plante. On doit nécessairement ajouter ensemble les effets provenant de la différence du terrain, de l'exposition, de la nature de la plante, de la manière d'observer, etc. Si les distances sont grandes, la différence des causes météorologiques vient se joindre encore à la différence des latitudes et des hauteurs.

Nonobstant ces nombreuses difficultés, l'espoir de recueillir quelques lumières sur cette intéressante question m'a fait tenter une entreprise dont j'ai eu l'honneur d'entretenir déjà Votre Altesse, dans une de mes lettres précédentes. J'aurais pu m'effrayer cependant en songeant que Linnée, le plus grand promoteur de la botanique, avait à peu près échoué dans une entreprise semblable. L'illustre savant suédois avait, en effet, invité ses amis à observer avec lui la floraison de quelques plantes; mais les résulats qu'il donne dans ses Aménités académiques, ne permettent d'en tirer aucune conclusion; et probablement il l'a senti lui-même, car il a renoncé à ce genre de recherches. Peut-être ce grand botaniste, malgré sa pénétration et sa rectitude de jugement, n'avait-il pas assez précisé ses questions, déterminé l'espèce et la variété qu'il fallait observer, l'instant qu'il convenait de saisir. On trouve dans les nombres qu'il donne, des discordances inexplicables.

En suivant les traces de ce grand maître et en m'aidant des conseils d'hommes instruits dans ces matières, je ne me

flatte pas de pouvoir résoudre un problème aussi difficile, mais j'espère cependant ne pas échouer entièrement, si les savants qui me secondent veulent bien persévérer dans leurs efforts. J'ai recueilli moi-même des observations, pendant deux années, avant de demander des secours étrangers; mes observations ont commencé en 1839; deux années après, j'ai prié quelques observateurs de Belgique de joindre leurs efforts aux miens, et ce n'est qu'en 1842 que j'ai osé faire un appel aux savants d'autres pays. J'ai recueilli ainsi des observations sur plusieurs points de la Hollande, de l'Angleterre, de la France, de la Suisse, de l'Italie et de l'Allemagne. En 1840, M. Fritsch conçut la même idée, et commença à recueillir, à Prague, sur les époques naturelles des plantes des observations qu'il consigna dans le recueil météorologique de M. Kreil. Des observations analogues se font également dans les États-Unis d'Amérique *.

En puisant à ces différentes sources, j'ai réussi à former le tableau suivant, dans lequel on trouvera les époques de la floraison du lilas pour différentes années, en même temps que les *époques moyennes*, calculées comparativement aux observations de Bruxelles **.

* Les observations de l'État de New-York sont tirées des rapports annuels des régents de l'université ; les nombres dont je me sers sont déduits des résultats donnés par 8 villes pour 1839, par 15 pour 1840, par 9 pour 1841, par 11 pour 1842, et par 10 pour 1843.

** Les époques moyennnes sont calculées de la manière suivante : le lilas a fleuri, à Parme, en 1843, le 10 avril, c'est-à-dire 10 jours plus tôt qu'à Bruxelles; en 1844, il a fleuri 8 jours plus tôt qu'à Bruxelles; en sorte que l'avance moyenne a

Époque de la floraison du lilas.

LIEUX D'OBSERVATION.	1839.	1840.	1841.	1842.	1843.	1844.	ÉPOQUE moyenne.
Parme.	»	»	»	»	10 avril	17 avril	19 avril
Venise.	»	»	»	»	»	16 »	19 »
Paris	»	»	»	20 avril	»	»	21 »
Bruxelles	10 mai.	28 avril	24 avril	28 »	20 avril	25 avril	28 avril
Liége	»	»	25 »	»	»	»	29 »
Louvain	»	»	29 »	27 »	»	»	30 »
Gand	»	»	28 »	30 »	23 avril	27 avril	1 mai.
Bruges	»	»	»	»	26 »	»	4 »
Ostende	»	»	»	10 mai.	26 »	»	7 »
Utrecht	»	»	»	6 »	»	6 mai.	7 »
Joppe, Deventer. .	»	»	»	»	»	5 »	8 »
Lochem, Gueldre .	»	»	»	»	»	7 »	10 »
Groningue, Frise .	»	»	»	12 mai.	»	»	12 »
Prague	»	8 mai.	8 mai.	8 mai.	3 mai.	»	10 »
Environs de Cambridge, Angleterre.	»	»	»	»	1 »	»	9 »
Munich	»	»	»	2 mai.	6 »	4 mai.	10 »
États de New-York.	16 mai.	16 mai.	26 mai.	16 »	22 »	»	21 »

Ces observations sont encore trop peu nombreuses pour qu'on puisse en accepter les résultats avec pleine confiance; plusieurs dates ne sont déterminées que d'après l'observation d'une seule année. On devrait avoir la patience de recueillir des annotations pendant plusieurs années consécutives, afin d'éliminer des résultats généraux tout ce qu'il pourrait y avoir d'accidentel dans les déterminations particulières.

été de 9 jours pour les deux seules observations que nous ayons. Or, le lilas fleurit à Bruxelles le 28 avril, on peut en conclure que l'époque de la floraison pour Parme est le 19 avril.

A défaut de temps, on peut recourir à un plus grand nombre de plantes, et opérer sur chacune d'elles, comme je l'ai fait pour le lilas. Chaque plante fournit ainsi une date particulière, et l'ensemble de ces dates rapprochées de celles obtenues à Bruxelles, permet de reconnaître l'avance ou le retard de la floraison dans les différentes localités, avec une précision d'autant plus grande, qu'on a fait concourir en général plus de plantes à cette détermination. Le tableau suivant donnera un exemple d'une pareille recherche; seulement je ferai remarquer que les différences des dates pour Genève, Alais et les environs de Londres, n'ont pas été déduites d'observations simultanées.

Bien que l'avance ou le retard de la floraison, indiqué par chaque plante d'une localité donnée, ne soit pas exactement la même, Votre Altesse peut reconnaître cependant que cet élément varie dans des limites peu larges, en considérant les nombreuses causes d'erreur qui peuvent influer sur le phénomène. Les nombres donnés par les localités qui entrent dans l'association dont Bruxelles est le centre, méritent surtout plus de confiance, à cause de leur simultanéité et de l'attention qu'on apporte à saisir autant que possible la même phase de la floraison, c'est-à-dire l'instant où la corolle s'épanouit. Les savants qui se sont occupés de la floraison n'ont pas toujours pris les mêmes précautions, et ils ont plus généralement rapporté le phénomène à l'époque où la plante était déjà plus ou moins couverte de fleurs.

Aussi leurs annotations, comparativement aux nôtres, seront presque toujours en retard de quelques jours.

Différence en temps pour la floraison, relativement à Bruxelles.

LOCALITÉS.	Syringa vulgaris.	Sambucus nigra.	Aesculus hippoc.	Philadelphus coronarius.	Digitalis purpurea.	MOYENNE.
Parme.	— 9 jours.	— 10 jours.	— 8 jours.	— 11 jours.	— 14 jours.	— 10 jours.
Venise.	— 9	— 2	•	— 14	•	— 8
Alais	— 44	— 16	— 16	— 22	•	— 24
Genève	— 2	+ 8	— 5	•	•	0
Paris	— 7	•	•	•	•	— 7
Valognes, Manche.	+ 7	— 4	•	•	— 8	— 2
Liége	+ 1	•	•	+ 3	— 2	0
Gand	+ 3	— 2	+ 1	+ 2	— 5	0
Bruges	+ 6	+ 3	•	•	•	+ 3
Ostende	+ 9	+ 10	+ 9	+ 7	+ 1	+ 7
Envir. de Londres.	+ 8	•	+ 5	•	+ 15	+ 9
Id. de Cambridge.	+ 11	+ 10	+ 11	+ 9	•	+ 10
Vucht, Brab. sept.	•	•	+ 9	— 6	•	+ 2
Utrecht	+ 9	+ 12	+ 8	+ 12	+ 9	+ 10
Lochem, Gueldre .	+ 12	•	+ 6	•	•	+ 9
Joppe, Deventer. .	+ 10	•	+ 7	•	•	+ 9
Groningue.	+ 14	+ 13	+ 17	+ 19	+ 7	+ 14
Prague	+ 12	+ 11	+ 7	+ 15	•	+ 11
Munich	+ 10	+ 23	+ 15	+ 32	+ 8	+ 18
Jever	+ 26	+ 29	+ 14	•	+ 33	+ 26
Rochester, États-Unis	+ 16	•	+ 17	•	+ 27	+ 20
Époque de la flor. à Bruxelles	28 avril.	22 avril.	1 mai.	19 mai.	4 juin.	

Je vais chercher maintenant à reconnaître, à l'aide des éléments que nous possédons, l'influence qu'exercent sur la

floraison la différence des latitudes et la différence de hauteurs. C'est sous ce point de vue que le phénomène a déjà été étudié par plusieurs savants.

De toutes les villes contenues dans notre catalogue, j'en excepte Rochester en Amérique, celle qui diffère le plus en latitude avec Bruxelles, c'est Alais, placée dans le département du Gard : la différence est de 6° 46′. Son élévation surpasse de 83 mètres celle de Bruxelles, et sa floraison devrait, par suite, être un peu retardée. Le retard, comme Votre Altesse le verra bientôt, est de quatre jours environ ; ces quatre jours ajoutés aux vingt-quatre indiqués dans le tableau de la floraison, donnent un retard de vingt-huit jours pour 6° 46′, ou à peu près exactement $4^j,1$ pour une différence d'un degré en latitude. Cette détermination s'accorde avec les deux suivantes.

L'époque de la floraison du lilas, de l'orme, du bouleau, du hêtre, du tilleul et du chêne est connue pour les environs de Naples *. En comparant les dates à celles de Bruxelles, on trouve que, dans cette dernière ville, la floraison a lieu 36 jours plus tard ; et comme, entre Naples et Bruxelles, la différence des latitudes est de 10 degrés a peu près exactement, Votre Altesse voit qu'il faut compter 3,6 pour un degré de différence en latitude. Ajoutons que les environs de Naples diffèrent peu en hauteur de ceux de Bruxelles.

L'illustre Linnée, dans ses Aménités académiques, donne les époques de la floraison du groseiller, du sorbier, du

* *Almanack de Berghaus*, 1840, page 65.

saule, du bouleau et du peuplier pour la localité de Grippenberg, en Laponie. Ces époques comparées à celles de Bruxelles, donnent, pour cette dernière ville, une avance de 48 jours. En considérant que la différence des latitudes est de 15° environ, je trouve 3,2 d'avance pour un degré. J'ignore du reste la hauteur à laquelle se faisaient les observations.

Il est donc permis de croire qu'on ne s'écarte pas trop de la vérité en admettant que la floraison subit en général un retard de 34 jours en avançant de 10 degrés vers le nord. M. Berghaus, dans son almanach pour 1840, publié à Gotha, estime cette avance à 40 jours pour les zones tempérées. Elle est moindre dans le Nord, et il ne la fait que de 34 jours entre Hambourg et Upsal, en Suède, ce qui s'accorde avec la détermination précédente; tandis qu'il trouve 74 jours en comparant le sud de l'Allemagne et les environs de Smyrne dans l'Asie mineure.

Le même savant estime que, dans nos climats, il faut compter un retard de 10 à 14 jours dans la végétation, en s'élevant de 1000 pieds de Paris ou de 325 mètres environ. Notre tableau précédent nous offrira les moyens de vérifier cette appréciation.

Le point le plus élevé au-dessus du niveau des mers, où des observations aient été faites comparativement à Bruxelles, est Munich, dont l'élévation est évaluée à 525 mètres. Cette hauteur surpasse celle de Bruxelles de 467 mètres. Or, la floraison a été observée, dans cette dernière ville, 18 jours plus tôt qu'à Munich, bien qu'il fallût s'attendre au contraire à

un retard de 10 jours, par suite de la différence en latitude des deux villes, qui est de 2° 42′. Le retard de Munich, en tenant compte de cette dernière correction, est donc réellement de 28 jours pour 467 mètres : c'est à peu près 6 jours de retard pour 100 mètres de hauteur.

Après Munich, Genève est le point le plus élevé comparativement à Bruxelles ; la différence des hauteurs est de 348 mètres, et celle des latitudes est de 4° 39′. Par suite de cette dernière différence, la floraison devrait avoir lieu à Genève 17 jours plus tôt qu'à Bruxelles, tandis qu'elle a réellement lieu le même jour, d'après le peu d'observations que j'ai pu recueillir. Le retard produit par l'élévation de la ville au-dessus du niveau des mers, compense donc l'avance qui devrait avoir lieu par suite de l'inégalité des latitudes. Mais 17 jours de retard pour une hauteur de 348 mètres, donnent un retard de 5 jours environ par 100 mètres. Cette détermination est un plus petite que la précédente, et elle est encore supérieure à celle donnée par Berghaus : je crois cependant qu'elle n'est pas exagérée.

Les deux corrections qui viennent d'être calculées, pour tenir compte de la différence des latitudes et des hauteurs dans le phénomène de la floraison, peuvent être utiles quand on compare entre elles des localités peu distantes ; mais il n'en est plus de même quand on considère une grande étendue de pays. Les données citées par M. Berghaus prouvent déjà combien il faut de réserve à cet égard. Ces discordances proviennent de ce que nous ne nous sommes pas

placés au véritable point de vue pour analyser le phénomène.

Nous avons reconnu que l'élément véritablement influent sur la végétation, c'est la température; or, pour que la méthode généralement adoptée, que j'ai suivie précédemment dans mes calculs, pût être valable, il faudrait que les lignes isothermes fussent des parallèles; ce qui n'est pas, comme Votre Altesse le sait fort bien. Les lignes isothermes mêmes ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème. Les plantes qui se développent et fleurissent pendant le printemps, ne dépendent que de la chaleur qu'elles ont reçue pendant cette saison, et non de la température du reste de l'année. Nous sommes forcés d'en revenir, ici, à notre première estimation, et de dire qu'à chaque plante se trouve attachée une constante, le carré d'un certain nombre de degrés de chaleur nécessaire pour que le phénomène ait lieu. Que la plante se trouve sous telle ou telle latitude, à telle ou telle hauteur, en plein air ou dans une serre, c'est la température du lieu qu'il faut considérer. On s'explique ainsi toutes les anomalies qui se présentent dans ce genre de recherches.

Les causes géographiques n'ont d'influence que par les variations qu'elles font éprouver aux températures. Il devient donc inutile de les prendre en considération dès qu'on a égard à l'état thermométrique du lieu où l'on observe la floraison. Je voudrais savoir, par exemple, à quelle époque le lilas fleurit à Prague. Dans ma manière de calculer, je commencerai par rechercher l'époque à laquelle les gelées d'hiver cessent dans cette ville; puis, je ferai la somme des

carrés des températures moyennes de chaque jour, à partir de cette époque jusqu'à celle où je serai parvenu à former le nombre 4264. Cette dernière époque sera celle de la floraison.

En suivant la marche par laquelle on a égard aux différences des latitudes et des hauteurs, il faudrait, en comparant Prague à Bruxelles, calculer que 0° 46′ de différence en latitude donne une avance de trois jours, et que, d'une autre part, une différence d'altitude de 118 mètres donne un retard de six jours; en sorte que le retard pour Prague, comparativement à Bruxelles, serait de trois jours. Au lieu de ce nombre, je trouve un retard de onze jours.

Je crois devoir faire remarquer, du reste, que les conséquences suivantes résultent de ma manière de calculer la floraison :

1° La ligne qu'on ferait passer, sur le globe, par tous les lieux où une plante fleurit le même jour, n'est point nécessairement parallèle à la ligne qui passe par les lieux où cette plante a fleuri dix ou vingt jours plus tôt.

2° Les lignes *isanthésiques*, c'est-à-dire de floraison simultanée, n'ont point un caractère général; elles se modifient aux différentes époques de l'année et tendent à se rapprocher des lignes isothermes.

3° Le temps qui s'écoule entre deux phases successives d'une même plante, ne peut être le même en passant d'un point du globe à un autre. Si en Angleterre, par exemple, quinze jours séparent les époques de la feuillaison et de la

floraison du lilas, cet intervalle ne saurait être aussi long en Italie ni en Espagne, où les températures prennent des accroissements plus rapides.

Je dois m'arrêter ici, car cette lettre est déjà bien longue. Cependant je sens que j'aurais encore plusieurs remarques à faire, pour éviter des objections que Votre Altesse pourrait m'adresser avec raison. Je n'ai pas eu l'intention d'approfondir le sujet si intéressant des époques périodiques des plantes, j'en ferai l'objet d'un travail spécial. Je n'ai voulu présenter qu'un exemple de la méthode qui me semble pouvoir être suivie avec succès dans l'étude de la plupart des phénomènes naturels.

Statist.

QUATRIÈME PARTIE.

DE LA STATISTIQUE.

LETTRE XXXIV.

Des sciences d'observation et de la statistique en particulier.

Les sciences d'observation ont pour objet l'étude des corps de la nature et des lois qui s'y rattachent. Elles procèdent par les mêmes voies, et les mêmes règles leur sont généralement applicables.

On peut les partager en trois classes : les sciences physiques, les sciences naturelles, et les sciences morales et politiques en tant qu'on les considère dans leurs applications. Elles sentent toutes également le besoin de commencer par réunir des faits bien observés, de les grouper avec méthode et discernement, de peser et d'apprécier leur valeur; et c'est ici que commence, à proprement parler, la science.

Elles recherchent ensuite les causes qui ont pu produire ces faits, étudient leur mode d'action et leur dègré d'énergie, et tâchent de s'élever ainsi, par la connaissance de ce qui est, à la connaissance de ce qui peut arriver.

Les sciences physiques étudient les lois générales des forces qui agissent sur tous les corps de la nature, soit en changeant leur composition intime, soit sans la modifier essentiellement. Elles font en quelque sorte abstraction de l'individualité de chaque corps.

Il n'en est pas de même des sciences naturelles; elles soumettent à un examen attentif les différents corps qu'on trouve à la surface de notre globe, pour les classer et en étudier les particularités. Elles se sont ramifiées en se développant, et les ramifications ont dû se proportionner à l'organisation plus ou moins complète des individus dont elles avaient à s'occuper.

C'est ainsi que la géologie fait connaître la distribution naturelle des minéraux sur notre globe, et la géographie physique celle des végétaux et des animaux.

La minéralogie décrit et classe les minéraux d'après leurs caractères, comme la botanique et la zoologie décrivent et classent les végétaux et les animaux.

La cristallographie fait connaître la structure des corps inorganisés; l'anatomie, celle des corps organisés depuis le dernier des lichens jusqu'à l'homme.

Les sciences naturelles marchent donc parallèlement; mais ici commence à se manifester une différence : pour les

corps organisés, le temps est un élément important qui leur fait subir une série non interrompue de modifications et de transformations. Ils naissent, croissent et meurent : chaque phase de ce développement offre un tableau à part; et l'étude des lois qui amènent cette succession, forme l'objet d'une science particulière, la physiologie, qui ne peut avoir son analogue pour les corps inorganiques, puisque ces corps ne vivent pas. Ils sont en quelque sorte placés en dehors du temps.

L'homme à son tour se sépare des végétaux et des animaux par des facultés particulières qui lui permettent de réagir sur lui-même et de modifier son moral et son intelligence. Il est éminemment progressif; et la science, ce trésor précieux qui lui appartient exclusivement, lui permet, en dehors de la vie individuelle, de transmettre à ses descendants un ensemble de connaissances qui le diversifient selon les temps et les lieux.

Les plantes et les animaux sont restés tels qu'ils sont sortis de la main du créateur. Quelques espèces, à la vérité, ont disparu, et d'autres se sont montrées successivement; mais leur description donnée à l'origine des choses, aurait encore la même valeur aujourd'hui. Il n'en est pas ainsi de l'homme, du moins de l'homme intellectuel et moral. L'histoire, et surtout celle des sciences et de la philosophie, retrace une série de phénomènes qui ne peuvent appartenir qu'à lui. Les sciences morales et politiques sont donc exclusivement de son domaine.

L'homme se distingue encore par un autre privilége. Il est éminemment sociable; il renonce volontairement à une partie de son individualité, pour devenir fraction d'un grand corps, qui a sa vie aussi et ses différentes phases. Une pareille agrégation d'hommes forme un *peuple;* et quand ce peuple possède un territoire et un gouvernement, il constitue un *état.*

Les états, de même que les individus qui les composent, naissent, croissent et meurent. Leur organisation et leurs lois de développement présentent une succession de phénomènes qui constitue l'histoire politique. On n'a pas encore recherché, que je sache, la durée moyenne des états; il est vrai qu'il est très-difficile d'en saisir le commencement et la fin. Cette durée est généralement moins longue que celle de l'existence d'un peuple : on peut en effet déchirer le pacte social, et, sans anéantir une population, la chasser du territoire qu'elle occupe; le peuple juif en est un exemple frappant. Le contraire ne saurait avoir lieu, car, le peuple étant anéanti, l'état cesse nécessairement.

Si l'on considère un état pendant une de ses phases de développement; si on l'arrête en quelque sorte dans sa marche pour l'étudier plus à l'aise, pour reconnaître son organisation et ses rapports avec tout ce qui l'entoure, on fera de la *statistique.*

La statistique suppose donc l'état un instant stationnaire, pour énumérer tous les éléments qui se rattachent à son existence; tandis que l'histoire politique le suit dans sa

marche et constate tous les phénomènes qu'il présente. L'une de ces sciences est à l'autre, ce que, dans un ordre de choses différent, la statique est à la dynamique, ce que le repos est au mouvement. Plus généralement, la statistique s'occupe de l'instant présent, en laissant le passé à l'histoire, et l'avenir à la politique. On aurait tort cependant de regarder cette halte, et cet examen fait par le statisticien, comme se réduisant à un instant infiniment court. L'examen doit porter, au contraire, sur une période suffisamment longue pour éliminer les causes accidentelles : il faut seulement avoir soin qu'il ne porte pas sur une période de temps telle que l'état social ait pu changer sensiblement dans l'intervalle.

Pour reprendre la comparaison que je faisais tout à l'heure; quand un corps est lancé, on peut chercher à reconnaître la ligne qu'il a parcourue; et si, dans un instant de sa marche, on pouvait analyser toutes les forces auxquelles il est soumis, on déterminerait sans peine la tangente à la courbe en cet endroit, c'est-à-dire la direction qu'il va suivre, sauf les empêchements ultérieurs qui peuvent l'arrêter ou le faire dévier.

La statistique ne se borne pas à faire une énumération consciencieuse des éléments d'un état, et à en présenter pour ainsi dire l'anatomie; elle peut avec succès porter ses investigations plus loin, et faire, comme l'anatomie comparée, des rapprochements entre l'organisation de deux états, ou, en restant dans les limites d'un même pays, prendre un

peuple à deux époques différentes de son existence et rapprocher les tableaux qui le représentent, pour pouvoir reconnaître ce qu'il a gagné ou perdu, et les éléments qui ont été le plus sensiblement influencés.

La *statistique comparée* n'empiète donc pas sur le domaine de l'histoire ni de la politique; elle se place en dehors du temps, et fait poser deux peuples divers, ou un même peuple à deux époques différentes de son existence, pour rapprocher les éléments comparables.

Si nous nous plaçons plus haut encore que nous ne l'avons fait jusqu'à présent, et si nous perdons de vue les particularités qui caractérisent les états, pour ne voir que les liens généraux qui les rattachent entre eux, nous embrasserons l'humanité tout entière. On conçoit en effet que les états sacrifient une partie de leur individualité, pour constituer la grande famille, le système général des hommes, comme les individus l'ont fait à l'égard des états.

Le corps social s'étend jusqu'aux dernières limites où l'homme a pu pénétrer; et il n'est pas de peuple, même à l'état sauvage, qui n'ait des notions plus ou moins développées du droit des gens. Les progrès de l'un deviennent profitables à l'autre, et les bienfaits de la science forment un trésor commun où chacun vient puiser, où chacun apporte son contingent. Le corps social, comme les individus, comme les états, a sa vie particulière, et ses phases de développement. L'histoire générale, l'histoire des sciences et celle de la philosophie, ont la noble mission de nous le représenter, dans

la succession des temps, sous le triple rapport du physique, de l'intelligence et du moral. Mais l'histoire ne suffit pas pour nous permettre de tout apercevoir; elle nous transmet la connaissance des faits qui se sont accomplis, des phénomènes de toute espèce qui se sont succédé. La *statistique générale* même, en s'aidant de l'ethnographie, ne nous présente qu'un tableau plus ou moins fidèle du corps social à un instant de son existence.

Ce grand corps subsiste en vertu de principes conservateurs, comme tout ce qui est sorti des mains du Tout-Puissant; il a aussi sa physiologie, comme le dernier des êtres organisés. Quand nous nous croyons au plus haut de l'échelle, nous trouvons des lois aussi fixes, aussi immuables que celles qui régissent les corps célestes; nous rentrons dans les phénomènes de la physique, où le libre arbitre de l'homme vient s'effacer entièrement, pour laisser prédominer sans atteinte l'œuvre seule du Créateur. L'ensemble de ces lois, qui existent en dehors des temps, en dehors des caprices des hommes, forme une science à part, à laquelle j'ai cru pouvoir donner le nom de *physique sociale*.

La physiologie se rapporte aux individus; elle fait connaître leurs lois d'évolution pendant une période déterminée, qui est celle de leur existence; quand il s'agit de l'humanité, il n'est point de période, du moins nous n'en connaissons pas; et, s'il en est une, nous sommes placés de manière à ne pouvoir en saisir qu'une faible portion.

LETTRE XXXV.

La statistique est-elle un art ou une science?

La statistique a donc pour objet de nous présenter l'exposé fidèle d'un état, à une époque déterminée.

Mais, en la ramenant à cette forme, doit-on la considérer comme un art ou comme une science? Avant de répondre, je demanderai à mon tour : qu'était la botanique à sa naissance? était-ce un art, était-ce une science? On se bornait à recueillir des plantes, à les reconnaître, à les énumérer, et à les décrire d'une manière plus ou moins complète. Combien les premiers inventaires du règne végétal étaient défectueux, même sous le rapport de l'art, et combien peu ils laissaient présumer ce que deviendrait un jour la botanique constituée comme science! Qui songeait alors à ces classifications ingénieuses et profondes qu'on a créées depuis; à l'anatomie végétale, qui devait nous initier dans les détails les plus intimes de la structure des plantes; et à la physiologie, qui nous révèle les phénomènes mystérieux de leur développement et de leur reproduction?

Qu'étaient, de leur côté, la minéralogie, la zoologie et

l'astronomie même, cette science si imposante de nos jours, qu'aucune autre ne pourrait donner une idée plus grande ni de la création ni du génie de l'homme? Cependant l'astronomie naissante se bornait à inventorier le ciel, à reconnaître les astres, à les grouper artificiellement en constellations, pour les graver dans la mémoire; mais qu'on était loin encore, même après plusieurs siècles d'étude, d'avoir mesuré les distances qui séparent les corps célestes, d'avoir apprécié les grandeurs, et jusqu'aux poids de ces mêmes corps, et d'avoir déchiré le voile qui couvrait les lois de leur mouvement à travers l'espace et de leur conservation dans la suite des temps!

Il y a plus: presque toutes les sciences, dans leur origine, au lieu de produire des fruits salutaires, ont donné lieu aux plus déplorables abus. L'astrologie, à l'aide de fourbes et de charlatans, exploitait audacieusement la crédulité des hommes, pendant que la véritable science des astres, timide et méconnue, essayait ses premiers pas et s'efforçait de monter sur son trône usurpé. L'alchimie, de son côté, vint s'asseoir auprès du berceau de la science qui étudie les lois de la composition des corps; et, pendant longtemps, elle aussi, elle trompa les hommes en leur promettant des résultats qu'il ne lui était pas donné de réaliser. La magie à son tour, prévoyant les merveilles que produirait un jour la physique, essaya de les accomplir à sa manière et d'usurper également un pouvoir qui ne devait pas lui appartenir. Chaque science, à son début, éprouve le même antagonisme; dès qu'on en-

trevoit le but éloigné où elle doit conduire, dès qu'on a la conscience de son avenir, l'imagination cherche à saisir par anticipation les trésors dont la méditation doit, un jour, nous donner la jouissance; elle enfante de brillants systèmes et cherche à faire passer chez les autres les illusions qui l'ont séduite.

Tel est le cours naturel des choses. Une science, avant de se présenter sous son véritable caractère, est assujettie à subir différentes phases; il en est que nous avons vues naître et dont les débuts ont été marqués par les mêmes séductions, par les mêmes promesses mensongères; aussi, niées par les uns, elles ont été exaltées outre mesure par les autres; le temps seul pourra les ramener dans leurs limites naturelles.

La statistique est venue à son tour, et elle est arrivée la dernière dans l'ordre des sciences, comme l'homme s'est présenté le dernier dans l'ordre de la création; et à peine la statistique a fait preuve d'existence, qu'on exige d'elle ce qu'on n'a pu raisonnablement demander à aucune de ses sœurs. A peine a-t-elle pu réunir quelques observations incomplètes, qu'on voudrait lui voir révéler les lois qui règlent la marche du corps social, et qui en assurent la stabilité et la conservation. Le professeur Achenwald, en lui donnant un nom, lui avait assigné une mission bien modeste; mais la statistique, en grandissant, a senti qu'elle était appelée à de plus hautes destinées.

Je le répète, toutes les sciences d'observation, à leur début, ont subi les mêmes phases; c'étaient des arts, car elles se

bornaient à grouper d'une manière plus ou moins heureuse des collections de faits appartenant à un même ordre de choses; et c'est par le rapprochement et l'étude de ces faits, qu'elles se sont élevées ensuite au rang où on les voit briller aujourd'hui. Pourquoi se montrer plus exigeant envers la statistique? Si elle se présente encore comme un art aux yeux du plus grand nombre, son avenir ne saurait être douteux pour ceux qui savent considérer les sciences d'observation sous un point de vue philosophique. Sa dénomination, fruit d'une conception incomplète, à nui à l'idée qu'on devait s'en former et a trop resserré le cercle de ses attributions. Mais quand un enfant vient de naître et qu'on lui impose un nom, il est bien difficile de dire comment il se développera et de savoir l'avenir qui l'attend.

Ne considérer la statistique que comme un point entre deux infinis, entre le passé et l'avenir; ne lui permettre que de décrire minutieusement ce qu'elle a pu observer pendant un instant si court; c'est évidemment trop resserrer sa mission.

La distinction est ingénieuse, mais je doute que les statisticiens consentent à la reconnaître. Quand il s'agira, par exemple, de comparer la vie moyenne dans un état à ce qu'elle est dans un autre, ou de la comparer successivement à ce qu'elle a été chez un même peuple, à différentes époques désignées, ils s'obstineront sans doute à vouloir la calculer, malgré la barrière qu'on leur oppose, et les historiens ne leur en sauront pas mauvais gré. Les écrivains

qui s'occupent de la politique des états, ne se plaindront pas non plus des empiétements des statisticiens, quand, avec les données actuelles, il s'agira d'apprécier les éventualités de certaines institutions et des opérations auxquelles elles se livrent.

Un célèbre économiste, J.-B. Say, restreignait également trop les limites de la statistique, en disant qu'il s'agit pour cette science de constater comment sont les choses dont l'état peut changer successivement, et non un état de choses immuables. Si un pays ne se composait que de choses immuables, il suffirait, en effet, d'en faire une fois pour toutes la statistique détaillée, mais encore faudrait-il la faire. Il serait difficile, du reste, de constater l'immutabilité de certains éléments, si l'on ne possède des statistiques faites à des époques suffisamment éloignées pour reconnaître les variations que le temps a pu leur faire subir.

On s'est généralement fort bien entendu quand on a fait de la statistique; mais il n'en a pas été de même quand il a fallu définir cette science : on a presque toujours eu une tendance à resserrer outre mesure les limites de son domaine. Je pense que la définition que je propose, et qui du reste s'écarte peu de celle donnée par plusieurs savants modernes, circonscrit suffisamment les attributions de la statistique, pour qu'on ne puisse pas la confondre avec les sciences historiques ou les autres sciences politiques et morales qui s'en rapprochent le plus. *Elle ne s'occupe d'un état que pour une époque déterminée; elle ne réunit que les éléments qui se rattachent*

à la vie de cet état, s'applique à les rendre comparables et les combine de la manière la plus avantageuse pour reconnaître tous les faits qu'ils peuvent nous révéler. Cette étude ne forme point empiétement sur le domaine des autres sciences, et si cet empiétement existait en effet, il ne pourrait qu'être avantageux, sous quelque dénomination qu'on voulût le cacher d'ailleurs, pour ne pas troubler la symétrie des classifications. Ceux qui peuvent en effet le mieux comprendre le langage des nombres, et l'on ne saurait nier que c'est sous cette forme que se résument la plupart des données statistiques, ce sont ceux qui les ont recueillis, qui les ont examinés, qui en connaissent le fort et le faible, et qui ont enfin l'habitude de ces genres de travaux.

Regarder les statisticiens comme des manœuvres chargés d'apporter des pierres brutes, et de les entasser pêle-mêle sur les lieux où doit s'élever l'édifice, en les abandonnant à des architectes qui n'en connaîtront pas la valeur, et qui, la plupart du temps, ne sauront pas les mettre en œuvre, c'est s'exposer à de fâcheux mécomptes. Il faut en tout de l'unité : que l'architecte, quand il construit, sache recueillir ses matériaux; laissez aussi au peintre le soin de réunir et de coordonner tout ce qui lui est nécessaire pour faire son tableau.

LETTRE XXXVI.

Objets dont s'occupe la statistique.

La statistique générale d'un état comprend essentiellement les cinq divisions suivantes :

1° La population;

2° Le territoire;

3° L'état politique;

4° L'état agricole, industriel et commercial;

5° L'état intellectuel, moral et religieux.

La population est l'élément statistique par excellence; il domine nécessairement tous les autres, puisqu'il s'agit, avant tout, du peuple et de l'appréciation de son bien-être et de ses besoins. On essaierait vainement de faire une bonne statistique, si l'on ne prenait, pour base, les résultats d'un recensement exécuté avec tous les soins et les garanties qu'exige une opération aussi délicate. Les autres données n'ont véritablement de prix qu'autant qu'on les rapporte au chiffre de la population.

Un recensement bien fait résume en quelque sorte les solutions des problèmes les plus importants que l'on peut pro-

poser au statisticien. La division par âges permet d'établir des tables de population, de se former des idées justes sur la mortalité, sur les forces dont l'état peut disposer au besoin, et de fixer le rapport entre la fraction utile qui contribue au bien-être général et la fraction qui réclame encore des secours et de l'appui, avant de devenir utile à son tour. La distinction par professions indique les moyens par lesquels le peuple pourvoit à sa subsistance et tend à augmenter sa prospérité; elle permet au législateur de fixer plus particulièrement son attention sur les principaux rouages qui fonctionnent dans la machine confiée à sa sollicitude. La division par états civils, par origines, par cultes, fournit à l'administration des renseignements non moins précieux pour assurer le bon ordre intérieur et faciliter l'exécution des lois.

Toutefois des difficultés nombreuses s'attachent à l'opération d'un recensement : on rencontre rarement, dans les administrations, toute l'intelligence et le zèle nécessaires pour conduire et exécuter cet important travail, et, chez le peuple, assez de lumières et une absence assez complète d'appréhensions et de préjugés, pour donner avec exactitude les renseignements qu'on lui demande. Si l'on considère qu'un recensement entraîne à des dépenses considérables et occasionne dans l'état une perte de temps d'autant plus sensible qu'elle atteint à la fois tous les individus, on concevra que cette opération, si utile d'ailleurs, ne doit se renouveler qu'à des époques plus ou moins éloignées. La période décennale semble être la plus favorable sous bien des rapports,

c'est du moins celle qui a été adoptée dans différents pays.

Un état civil bien tenu forme également un des premiers besoins d'un peuple éclairé : il est indispensable au gouvernement autant qu'au repos des familles. Pour en assurer la régularité, on a senti le besoin de prononcer des peines contre ceux qui, par négligence ou mauvais vouloir, pourraient y introduire des lacunes ou des erreurs. Aussi les documents de l'état civil, dans les pays où de pareilles mesures ont été adoptées, doivent être rangés parmi les données les plus utiles dont la statistique puisse faire usage. Ces documents sont en général relatifs aux naissances, aux décès et aux mariages, et constituent ce qu'on est convenu de nommer le *mouvement de la population*. L'inscription des décès par âges, permet de dresser des tables de mortalité, dont les avantages se font sentir non-seulement dans toutes les branches de l'administration, mais encore dans la plupart des questions qui se rattachent à l'hygiène publique et aux opérations des sociétés d'assurances. En rapprochant le chiffre des naissances de celui des décès, et en tenant compte des mutations de domicile, on supplée à des recensements périodiques trop rapprochés, et l'on parvient à constater l'état de la population avec toute l'exactitude désirable.

Quand le mouvement de l'état civil est établi avec soin, il fait connaître encore le rapport des naissances légitimes et illégitimes; le nombre des mort-nés, les âges respectifs auxquels se contractent les mariages chez les deux sexes,

l'influence des professions et un grand nombre d'autres renseignements qui intéressent le philosophe autant que l'homme d'état.

Les opérations relatives aux milices et au recrutement des armées se font, dans quelques pays, avec une régularité et une sévérité qui doivent faire rechercher les résultats qu'elles produisent. Ces résultats sont d'autant plus utiles qu'ils permettent de constater la force d'une des fractions les plus intéressantes de la population, celle qui est appelée à pourvoir désormais à sa conservation et à sa défense.

Je l'ai déjà dit ailleurs *, les tableaux numériques d'une population, quand ils sont dressés avec soin et avec tous les développements que réclame la science, sont une source féconde d'instruction; ils forment, dans les annales d'un peuple, la page la plus éloquente que puisse lire l'homme d'état, s'il est capable de la comprendre. Il n'appartient en effet qu'à l'observateur exercé de saisir complétement le langage des chiffres, et de ne point aller au delà de ce qu'ils peuvent apprendre. Des recensements bien faits et qui se succèdent sur un plan uniforme, à des époques suffisamment rapprochées, doivent présenter les notions les plus précises sur l'état physique et l'état moral d'un peuple, sur le degré de sa force, de sa prospérité, sur les tendances qui peuvent compromettre son avenir; ils enseigneraient bien mieux que de volumineuses enquêtes, que viennent souvent

* *Sur le recensement de Bruxelles*, tome Ier des *Annales de la Commission centrale de statistique.*

entraver des préjugés et des intérêts particuliers, ce que l'on doit penser de l'état rétrograde ou des développements immodérés de certaines branches d'industrie.

En attribuant une importance si grande à la statistique de la population, je suis loin de méconnaître le prix qu'on doit attacher à posséder des notions précises sur le territoire et l'état politique, qui influencent si puissamment la manière d'être d'un peuple et tout son avenir, de même que sur la création et l'emploi de ses richesses, sur son état moral et intellectuel.

On conçoit du reste qu'en traitant successivement chacune de ces parties, on doit s'abstenir de recueillir des documents, intéressants d'ailleurs sous d'autres rapports, mais qui ne se rattacheraient pas directement au but de la statistique. La partie *territoire*, par exemple, ne doit pas comprendre tous les objets appartenants aux trois règnes de la nature que le pays renferme, mais seulement ceux qui servent aux usages de l'homme, soit pour être consommés immédiatement, soit pour être utilisés par le commerce et l'industrie.

Telle plante croît spontanément en Belgique, mais ce n'est pas une raison pour lui donner place dans la statistique du royaume; si elle n'a aucun rapport avec l'homme, si elle ne lui est ni utile ni nuisible, elle doit figurer exclusivement dans la flore de la Belgique. Si, plus tard, l'homme s'en empare pour l'utiliser, c'est alors seulement qu'il l'inscrira dans la statistique; et la manière dont il la mentionnera, sera bien différente de celle du botaniste : il ne sera point préoccupé

de ses caractères scientifiques, mais bien de la quantité que l'on en récolte et des avantages qu'on en retire.

Il en est de même des animaux : ils ne doivent figurer dans les statistiques qu'autant qu'ils sont utiles ou nuisibles ; et quand ils y figureront, ils seront envisagés sous un point de vue bien différent que dans les faunes du pays. Si l'on y parle des chevaux, il ne sera nullement question de descriptions zoologiques, mais du nombre de ces animaux dont l'homme peut disposer pour ses différents usages et des valeurs qu'ils représentent. La division du territoire, la nature et les mouvements du terrain, l'étendue des forêts, la circulation des eaux, seront étudiés également par le statisticien et par le géographe sous des rapports très-distincts.

On peut en dire autant de la météorologie : les éléments que le physicien étudie avec le plus de soin, ne sont pas ceux qui fixeront l'attention du statisticien. Celui-ci désire connaître, avant tout, ce qui peut influer sur l'homme et contribuer à son bien-être ; celui-là s'occupe de l'étude de la nature dont il recherche les lois en dehors de l'idée de bénéfice que nous pouvons en retirer.

Cette distinction est essentielle, parce qu'un grand nombre d'auteurs ont transporté dans la statistique d'autres sciences qui lui sont étrangères, comme la géographie physique, la minéralogie, la botanique, la météorologie, etc.

D'autres, au contraire, ont voulu la restreindre, et la réduire à ne présenter que des tableaux purement numériques, sans songer qu'il existe des renseignements qu'il serait im-

possible d'exprimer en nombres. L'exposé de l'état politique, par exemple, appartient essentiellement à la statistique d'un pays, et cependant on ne saurait le faire connaître par des chiffres. On peut en dire autant de beaucoup de renseignements relatifs à l'état moral et intellectuel. Le simple récit de ce qui s'est passé dans une localité à une époque donnée, en apprend quelquefois plus sur l'état moral d'un peuple que tous les tableaux numériques possibles.

Le désir de ne présenter que des nombres, fait qu'on néglige souvent de donner des renseignements essentiels sur la manière dont ces nombres ont été recueillis et sur les circonstances qui ont pu influer pour les rendre plus ou moins exacts, plus ou moins complets. On omet ainsi une partie des données nécessaires pour résoudre les problèmes statistiques les plus simples, et pour déduire des conséquences utiles de faits dont on voudrait apprécier les causes.

Les recettes et les dépenses d'un pays, l'état de ses dettes, et tout ce qui se rattache à la situation du trésor, méritent une attention d'autant plus grande qu'on peut facilement être entraîné à commettre de graves erreurs. Quelques personnes ont comparé des pays sous le rapport de l'impôt moyen payé par chaque individu, en perdant de vue des distinctions essentielles. Ainsi, dans un état, telle somme figure au budget des recettes, qui, dans un autre, se trouve omise, parce qu'elle est payée à l'octroi des villes. Il ne faut pas juger trop exclusivement, d'ailleurs, des charges de l'im-

pôt par le chiffre du budget. Votre Altesse sait très-bien qu'elle pourrait diminuer de beaucoup le chiffre annuel du budget de ses états, en supprimant ce qui se trouve porté pour l'instruction publique, pour les beaux-arts, pour l'amélioration des voies de communication, etc. Serait-ce un bien? non certes; car il en résulterait que chacun, pour continuer à jouir des avantages actuels, devrait, avec des frais plus grands, pourvoir individuellement à l'instruction de ses enfants ou aux réparations qu'exigent les chemins qui avoisinent sa demeure. On a remarqué avec raison que ce sont les pays les plus civilisés qui, proportionnellement, payent le plus au gouvernement.

La statistique agricole, industrielle et commerciale d'un pays, resserré même dans les limites les plus étroites, formerait un travail immense, si l'on cherchait à entrer dans tous les détails. Mais un esprit judicieux appréciera sans peine la place qu'il convient de donner à chaque chose d'après son degré d'importance.

S'il est quelques éléments utiles à constater d'année en année, il en est beaucoup d'autres qu'il suffirait de présenter à des périodes beaucoup plus longues, ceux surtout qui ne subissent que de faibles fluctuations. Les produits de l'agriculture, qui servent le plus directement à la consommation de l'homme, doivent être rangés parmi les objets dont il importerait de déterminer annuellement les quantités et les prix; il en est de même du combustible, qui entre pour une si grande part dans les besoins de l'industrie.

Dans les immenses volumes de statistique publiés chaque année par les différents états, combien peu de renseignements sont véritablement utiles! On passe à des sous-divisions sans nombre, et l'on arrive à des chiffres si faibles que les conséquences qu'on en pourrait déduire seraient nécessairement fausses; on laisse prédominer les causes accidentelles, au point qu'il est impossible de les séparer des causes régulières dont on voudrait apprécier les influences. Ce luxe de chiffres, cette espèce de charlatanisme scientifique occasionne d'ailleurs à l'état des dépenses considérables.

Un des plus grands inconvénients des statistiques industrielles, c'est qu'elles exigent l'intervention de personnes qui sont presque toujours intéressées ou qui croient avoir intérêt à déguiser la vérité. Quand c'est un gouvernement qui les forme, il se trouve généralement en hostilité avec le fabricant, qui lui suppose des vues fiscales. Le désir de faire favoriser son industrie et d'obtenir ce qu'on appelle des lois protectrices, lois qui ne sont au fond que de véritables priviléges obtenus des gouvernements voisins aux dépens d'autres industries, porte presque toujours à exagérer dans l'un ou l'autre sens.

Les gouvernements publient aussi des documents sur les importations et les exportations : ces tableaux, qui sont utiles à consulter, renferment souvent néanmoins des données très-vagues. On se borne en général à fixer ou les prix d'après des évaluations fautives, ou les quantités sans avoir égard ni aux prix ni aux qualités. Dans ces évaluations offi-

cielles on ne connaît d'ailleurs qu'une partie de la vérité : c'est ici surtout que des renseignements non susceptibles d'être réduits en nombres, deviendraient nécessaires pour déterminer la quantité présumable qui échappe aux appréciations légalement constatées.

La statistique de l'état moral et intellectuel d'un peuple soulève des difficultés plus grandes encore; car elle ne peut fonder ses appréciations que sur des faits beaucoup plus contestables que ceux qui sont donnés par l'industrie ou le commerce. Quand on dit qu'une province produit tant d'hectolitres de froment, tant de kilogrammes de houille, on sait que ces chiffres peuvent être plus ou moins en erreur, mais l'on s'entend sur la nature de l'unité. Il n'en est pas de même, quand on dit qu'une province produit annuellement tant de crimes; outre qu'il existe beaucoup plus d'incertitude sur la fixation du chiffre, les crimes en général ne sont pas comparables pour la gravité, et l'on n'aperçoit bien souvent que d'une manière confuse les rapports qui se trouvent entre eux et les causes qui les ont fait naître; or, ce sont ces rapports qu'il convient d'étudier, si l'on veut déterminer l'état moral du peuple. Il faut infiniment de précautions et de sagacité pour lire avec quelque succès dans les statistiques des tribunaux; car les documents qu'elles renferment sont très-complexes de leur nature et presque toujours incomplets.

Que d'erreurs n'a-t-on pas accumulées en traitant du paupérisme! Pour sonder cette lèpre de la société, on a eu

recours aux listes des pauvres, et très-souvent sans rechercher si ces listes étaient complètes et comparables d'un pays à un autre, ou même dans les limites d'un seul pays. La pauvreté réelle est presque toujours très-différente de la pauvreté officiellement constatée. De ce qu'une localité n'a point de bureau de bienfaisance, on conclut en général qu'elle ne renferme pas de pauvres; et, d'après les mêmes estimations, fondées sur les listes officielles, la pauvreté serait proportionnelle aux sommes que l'on distribue. C'est ici surtout qu'on voit l'inconvénient de ne consulter que des tableaux numériques, et d'attribuer la même valeur à toutes les unités qu'ils renferment. En Belgique, un homme du peuple se fera inscrire sur la liste des pauvres pour échapper au service de la garde civique ou se ménager d'autres avantages, sans recevoir aucun denier de la bienfaisance publique. Peut-on alors raisonnablement le confondre avec son voisin, qui vit uniquement des aumônes qu'il reçoit?

Les plus grands inconvénients des statistiques morales et intellectuelles tiennent donc à la difficulté de rendre les unités comparables. Pour mesurer l'instruction d'un peuple ou l'état de ses lumières, on s'est servi parfois des tableaux qui font connaître le nombre des enfants qu'on envoie aux écoles, ou le nombre des personnes sachant lire et écrire, d'après les déclarations faites devant les conseils de recrutement ou devant les tribunaux. Ces documents sont certainement très-curieux et très-utiles, mais ils ne constituent qu'une partie des renseignements nécessaires pour décider

la question; encore faudrait-il savoir ce que l'on enseigne dans les écoles et ce que l'on entend par savoir lire et écrire. Ce dernier talent s'acquiert le plus souvent d'une manière mécanique, comme le maniement du rabot ou celui de l'aiguille, et ne contribue pas plus à développer l'intelligence qu'à former le moral.

Le mal ne réside ici, je le conçois, que dans la mauvaise interprétation qu'on donne aux documents statistiques. Mais toujours est-il que cette mauvaise interprétation tient le plus souvent à ce que les documents sont incomplets et mal exposés, à ce qu'on croit pouvoir présenter des nombres sans expliquer le sens qu'il y faut attacher. Ces difficultés ne doivent point arrêter le statisticien; il sentira seulement le besoin de procéder avec la plus grande réserve, de donner tous les moyens nécessaires pour rendre comparables les documents qu'il recueille, et s'il ne peut les présenter d'une manière complète, il essaiera au moins d'indiquer les limites présumables entre lesquelles les véritables nombres se placeraient.

On devrait s'abstenir en général de faire entrer dans les statistiques des données qui ne sont point parfaitement exactes; ou, si l'on est forcé de recourir à des nombres qui n'offrent pas toutes les garanties nécessaires, il faudrait du moins avoir la précaution d'en prévenir.

LETTRE XXXVII.

Des différentes formes qu'affectent les statistiques.

Les statistiques sont *générales* ou *spéciales*, selon qu'elles étudient ou toutes les parties qui composent un état, ou quelques parties seulement, dans la vue d'éclaircir certaines questions.

Quand une statistique n'embrasse, dans ses recherches, qu'une faible étendue de pays, on la nomme statistique *locale*, tandis qu'on donne le nom de statistique *universelle* à celle qui s'occuperait de l'univers entier.

Les statistiques sont aussi de deux espèces, sous le rapport des sources d'où elles émanent. Les unes sont publiées par les gouvernements ou sous ses auspices, d'autres par de simples particuliers.

Quelques écrivains ont encore distingué les sources d'après le degré de confiance qu'elles méritent, en sources *primaires* et en sources *secondaires*.

Les statistiques *officielles*, c'est-à-dire celles publiées par les gouvernements, sont en général des statistiques spéciales, et elles émanent de l'une ou de l'autre branche de l'adminis-

tration. Dans quelques états, et surtout dans les états constitutionnels, ces publications sont périodiques : c'est ainsi que l'on a des publications sur les finances, sur le mouvement de l'état civil, sur la marche de la justice, sur le commerce intérieur et extérieur, sur l'instruction, sur les établissements de bienfaisance, etc.

Ces publications doivent être exemptes de toute espèce de discussion, se borner à présenter les faits dans leur forme la plus simple et les abandonner aux appréciations des savants et des hommes d'état.

Je ne crois pas cependant qu'il faille porter le rigorisme jusqu'au point d'interdire absolument toute comparaison de nombres. Ainsi, les renseignements sur la marche de la justice qui sont publiés en France, en Belgique et dans le grand-duché de Bade, donnent ordinairement, par forme d'introduction, à côté des nombres de l'année, ceux qui ont été obtenus pendant les années précédentes, mais sans porter plus loin les rapprochements.

On peut aussi établir quelques rapports entre les nombres que l'on compare le plus souvent, afin d'éviter des calculs fastidieux à ceux qui doivent habituellement faire usage des résultats : ainsi, dans ces mêmes statistiques, on calculera le rapport entre le nombre des condamnés et celui des accusés ou des prévenus. Dans les statistiques concernant le mouvement de l'état civil, on calculera le rapport du nombre des décès au chiffre de la population, pour connaître la mortalité, ou celui des naissances légitimes aux mariages, pour se

faire une idée de la fécondité; mais il faut toujours être sobre de pareils rapprochements.

Les gouvernements, en publiant les documents qu'ils ont recueillis, devraient avoir soin d'indiquer les moyens qui ont été employés pour les obtenir, à moins que ces moyens ne soient écrits déjà dans les lois ou les règlements en vigueur.

On voit assez souvent, dans les pays constitutionnels surtout, former des statistiques spéciales pour éclaircir certaines questions qui doivent être soumises à la législature. Les documents sont même accompagnés de remarques qui tendent à faire apprécier les conclusions qu'on en peut déduire; mais, quand le gouvernement discute, on se trouve plus ou moins prévenu contre lui; on a une tendance à croire qu'il a un intérêt direct à faire prévaloir les conséquences tirées des éléments qu'il présente.

Les particuliers publient rarement des données statistiques sans les accompagner de remarques ou sans faire de la statistique comparée; ils ont en général en vue d'étudier une question sous toutes ses faces ou de faire prévaloir une idée qui les préoccupe. L'incertitude où l'on est sur leur véritable but, fait qu'on regarde comme suspects les documents qu'ils donnent. Aussi devraient-ils toujours citer soigneusement les sources où ils ont puisé, et présenter toutes les garanties nécessaires pour s'assurer la confiance publique. Ici, plus que partout ailleurs, les autorités deviennent nécessaires.

Quand la statistique prend un caractère pratique, on doit user de beaucoup d'art pour bien s'en servir et pour interroger utilement les nombres; il faut, d'une autre part, de l'habitude et un tact particulier pour bien apprécier la valeur des réponses qu'on obtient. Si l'on est préoccupé d'une idée systématique, il arrive en général qu'on adopte avec empressement, comme favorables à cette idée, les résultats qui présentent des anomalies, non pas en vertu d'une cause déterminée, mais en vertu des causes accidentelles. Ces méprises ont souvent lieu à l'insu de ceux qui les font. Or on remarquera presque toujours que les écrivains qui cherchent à faire prévaloir des systèmes, en s'appuyant sur des chiffres, emploient des nombres très-faibles. En ne prenant en effet que peu d'observations et en choisissant les nombres, on peut, par l'effet des causes accidentelles, défendre toutes les thèses possibles. A l'aide de ces nombres, dont on ne saurait d'ailleurs contester la vérité, on met sa conscience parfaitement en repos, et l'on démontre à peu près tout ce que l'on veut. Ce sont ces manéges qui inspirent une défiance toujours très-grande contre les statistiques spéciales et qui ont fait les plus grands torts à la science, auprès des personnes qui ne jugent que superficiellement des choses.

Il est un défaut contre lequel on ne saurait trop s'élever, c'est cette tendance qui règne, dans les statistiques particulières comme dans certaines statistiques officielles, à faire un usage immodéré des nombres. En ouvrant ces livres, on est effrayé à l'idée des erreurs qu'ils doivent renfermer, sur-

tout si l'on songe aux difficultés qu'on éprouve à réunir quelques données simples qui soient exactes. Bien des savants voudraient tout traduire dans le langage des chiffres; les détails les plus insignifiants de l'administration, ceux même de la vie privée deviendraient les sujets d'autant d'enquêtes statistiques. Ils rechercheront bientôt, à la manière dont sont usés les seuils des temples, si l'on y entre du pied droit ou du pied gauche. Certainement de pareilles recherches dirigées par un homme d'esprit, peuvent conduire à des résultats très-piquants sur la constance de nos actions, même dans les circonstances les plus insignifiantes de la vie; elles peuvent exciter la curiosité autant qu'un ouvrage littéraire destiné à produire quelque délassement à l'esprit; mais elles ne doivent point prendre rang dans le cercle des travaux dont la statistique s'occupe. Si l'on descendait à de pareils détails, notre existence ne suffirait plus pour étudier et discuter les faits les plus importants qui se passent autour de nous, et nos habitations seraient exclusivement envahies par les volumineuses publications qui contiendraient l'ensemble de toutes ces recherches futiles. En comparant la multitude infinie des phénomènes sociaux aux bornes étroites de notre intelligence et à la lenteur de nos travaux, ne serait-ce pas le cas de s'écrier avec Diderot : « Quel est donc notre but? l'exécution d'un ouvrage qui ne peut jamais être fait, et qui serait fort au-dessus de l'intelligence humaine, s'il était achevé? Ne sommes-nous pas plus insensés que les premiers habitants de la plaine de Sennaar? Nous

connaissons la distance infinie qu'il y a de la terre aux cieux, et nous ne laissons pas que d'élever la tour; mais est-il à présumer qu'il ne viendra pas un temps où notre orgueil découragé abandonnera l'ouvrage? »

LETTRE XXXVIII.

Sur la manière de réunir des documents statistiques

Votre Altesse comprend sans peine que la difficulté d'obtenir des documents exacts, forme un des plus grands obstacles aux progrès de la statistique. Dans les autres sciences, de simples particuliers peuvent réunir avec plus ou moins de peine les observations nécessaires à leurs travaux; mais il n'en est pas de même pour la statistique. La plupart des documents dont elle a besoin, ne peuvent être obtenus que par les gouvernements, qui souvent n'ont ni le temps ni le vouloir de les demander; et, quand ils les possèdent, leur intérêt les porte à les tenir secrets, ou à ne les publier que partiellement, et quelquefois même en les altérant.

Les gouvernements fondés sur des principes de liberté, sont les plus favorables pour le genre d'étude qui nous occupe, parce qu'on trouve dans la publicité des moyens précieux de vérification. Si le particulier est généralement dans l'impossibilité d'assembler des documents relatifs à tout un état, il a presque toujours les moyens d'en con-

trôler certaines parties, quand c'est l'administration qui les fait connaître et que la presse n'éprouve aucune entrave.

Dans la composition des ouvrages statistiques, il faut considérer plusieurs choses essentielles: 1° les questions à poser; 2° les modèles à remplir; 3° les moyens de contrôle; 4° la formation la plus avantageuse des tableaux destinés à recevoir de la publicité. Votre Altesse m'excusera sans doute si j'évite d'entrer, ici, dans tous les détails qu'exigerait un cours de statistique; mais peut-être prendra-t-elle intérêt à connaître quelques-unes des principales conditions auxquelles il faut avoir égard.

Avant de demander des renseignements statistiques, il convient d'étudier avec soin la question que ces renseignements doivent éclaircir; il faut chercher à séparer les causes qui la dominent, celles surtout qui exercent le plus d'influence. Sans cette étude préalable, il serait impossible d'arrêter le programme des demandes qui doivent être faites; on s'exposerait à recevoir des documents incomplets, ou des détails inutiles.

Les principales considérations qui doivent guider une administration dans les questions à poser, sont les suivantes:

1° Ne demander que des renseignements absolument nécessaires et qu'on est sûr de pouvoir obtenir.

2° Éviter les demandes qui peuvent exciter la méfiance et blesser des intérêts locaux ou des susceptibilités person-

nelles; de même que celles dont l'utilité ne serait pas suffisamment appréciée.

3° Être précis et clair, afin que les demandes soient comprises partout de la même manière, et que les réponses soient comparables.

Adopter, dans cette vue, des modèles uniformes qui puissent être uniformément remplis.

4° Faire recueillir les documents de telle sorte que les vérifications soient possibles.

Les administrations doivent soigneusement éviter de fatiguer par des questions, et surtout par des questions qui ne portent pas le cachet d'une utilité immédiate, parce qu'elles s'exposent à ne pas recevoir de réponses; ou à n'obtenir que des documents fautifs. Rien ne déconsidère autant le pouvoir que la demande de choses dont il est forcé, lui-même, de reconnaître ensuite l'impossibilité. Il s'ôte ainsi les moyens de parler avec autorité et de se faire obéir.

D'une autre part, dès que, dans des questions, on croit reconnaître un but fiscal ou une curiosité inquisitoriale, on conçoit des méfiances, et l'on ne se fait point scrupule de donner des réponses inexactes.

La simplicité et la clarté des demandes, en même temps que l'uniformité des modèles à remplir, sont des conditions essentielles pour obtenir des résultats comparables; sans elles il n'est point de statistique possible. Partout où il est question des âges, des professions, des maladies, il est de la plus grande importance de n'employer que des classifications par-

faitement identiques, afin que les renseignements généraux puissent être comparés jusque dans leurs moindres détails. La plus parfaite unité doit régner dans tout l'ensemble.

C'est pour établir une pareille unité que, dans quelques états, tels que la Belgique et le Piémont, on a créé des commissions centrales chargées de réunir et de coordonner les divers éléments qui doivent entrer dans une statistique nationale. La nécessité de pareilles institutions se fait surtout sentir quand on voit, dans des pays très-éclairés, les principaux départements publier des chiffres quelquefois très-différents pour exprimer les mêmes choses, ou bien établir des classifications qui rendent les rapprochements impossibles. Les moindres inconvénients de ce défaut d'unité, sont les doubles emplois qui, tout en occasionnant des dépenses inutiles, augmentent d'une manière incommode les volumes des publications officielles.

Il convient aussi de distinguer soigneusement, comme j'ai déjà eu l'occasion de le faire observer à Votre Altesse, les éléments pour lesquels il faut réunir annuellement des données statisques ; je range en première ligne les éléments le plus en rapport avec le bien-être du peuple, ceux surtout qui sont exposés aux fluctuations les plus grandes; il suffit de constater les autres à des intervalles plus éloignés. De ce nombre est le recensement de la population, malgré son importance; les difficultés qui entourent cette opération si délicate et les frais qu'elle occasionne, doivent nécessairement la rendre moins fréquente.

Il convient aussi de s'attacher à déterminer le nombre des observations nécessaires pour établir un fait. Ainsi, pour constater l'effet salutaire de la vaccine, il a fallu bien moins d'observations que pour reconnaître la prépondérance du sexe masculin dans le chiffre des naissances. Ceux qui sont chargés de recueillir des documents statistiques, doivent soigneusement étudier toutes ces nuances, afin de ne pas multiplier inutilement les travaux de recherche, et de ne pas en occasionner d'insuffisants ou de complétement inutiles. L'économie de temps est un point capital en fait d'administration ; dans bien des circonstances, on doit la préférer à l'économie d'argent.

Il est des éléments très-utiles à connaître et qu'on ne peut déterminer que d'une manière indirecte. Il serait imprudent, par exemple, de demander au cultivateur le produit net de ses terres : ce serait exciter sa méfiance et provoquer des réponses inexactes; tandis que le même cultivateur verra moins de difficultés à faire connaître la nature et la quantité des produits. On peut ensuite, par des rapports établis avec soin, déduire de la nature des produits leur valeur pécuniaire. La Place avait proposé de substituer au recensement général d'un grand pays, tel que la France, quelques recensements particuliers dans des départements choisis, où ce genre d'opération pouvait avoir le plus de chances de succès; puis d'y déterminer avec soin le rapport de la population, soit aux naissances, soit aux décès. Au moyen de ces rapports et des chiffres des naissances et des décès de tous les

autres départements; chiffres que l'on peut constater avec assez d'exactitude, il devient facile ensuite de déterminer la population de tout le royaume. Cette manière d'opérer est très-expéditive, mais elle suppose un rapport invariable en passant d'un département à un autre. On peut à la vérité choisir les départements pour lesquels on détermine les rapports, de manière que la moyenne ne s'écarte pas trop du rapport qu'on aurait pour tout le royaume. Cette méthode indirecte doit être évitée autant que possible, bien qu'elle puisse être utile dans certains cas, où l'administration aurait à procéder avec rapidité; on peut aussi l'employer avec avantage comme un moyen de contrôle.

Ne pas se procurer la faculté de vérifier les documents que l'on réunit, c'est manquer à l'une des principales règles de la science. La statistique n'a de valeur que par son exactitude; sans cette qualité essentielle, elle devient nulle, dangereuse même puisqu'elle conduit à l'erreur. La nécessité de contrôler les documents statistiques est si grande, que je me propose d'en faire l'objet d'une lettre spéciale, que j'aurai l'honneur d'adresser très-prochainement à Votre Altesse.

Avant de déposer la plume, il me reste encore à présenter quelques remarques sur la formation la plus avantageuse des tableaux statistiques destinés à recevoir de la publicité; et d'abord je dirai quelques mots du format. Cette question pourra paraître assez futile; à une époque surtout où nous portons dans nos livres toutes les anomalies que nous affec-

tons de montrer dans nos vêtements. Que vous importe, dira-t-on, l'in-quarto, ou le modeste in-dix-huit, ou le majestueux in-plano? Le choix à faire n'est pas si futile qu'il le paraît au premier abord ; Votre Altesse en jugera.

Le statisticien a surtout besoin de pouvoir établir des rapprochements, et d'avoir à la fois le plus de données possible sous les yeux. Il importe ensuite, en donnant des documents numériques, de ne pas trop les morceler pas des additions partielles qu'on est forcé de faire au bas de chaque page. Les tableaux les plus grands seraient donc les plus avantageux, si l'on pouvait les manier commodément et saisir d'un même coup d'œil tout ce qu'ils renferment. On a cherché à concilier tous ces avantages, en faisant des publications en format extrêmement réduit et en employant de très-petits caractères; mais le nouvel inconvénient qui s'est présenté, a été plus grave que celui qu'on voulait éviter. Les chiffres sont devenus illisibles par leur petitesse; et, à moins d'être armé de loupes, il était impossible d'en faire usage. L'expérience semble avoir prouvé aujourd'hui que le format in-quarto répond le mieux à toutes les exigences; le champ de la vision embrasse facilement toute la page, qui peut contenir d'ailleurs sans confusion et dans des caractères très-lisibles, un grand nombre de documents qu'on voudrait éviter de séparer.

Si je ne craignais de descendre à des détails trop minutieux, je parlerais aussi de la disposition à donner aux tableaux numériques et de la rédaction des en-têtes qui exigent, avant tout, de la précision et de la clarté.

Quelques personnes en calculant des moyennes arithmétiques, poussent l'opération bien au delà des limites de l'exactitude, et donnent des chiffres décimaux auxquels on ne peut attacher aucune confiance. Ainsi, un édifice aurait été mesuré six fois de suite, et l'on aurait trouvé sa hauteur de 60 mètres environ : nous supposerons que les six mesures soient exprimées en mètres et décimètres. Un calculateur prend ensuite la moyenne arithmétique de ces six nombres, et il l'exprime en mètres, décimètres, centimètres, millimètres et dix-millimètres. C'est évidemment montrer une conscience trop méticuleuse, car une pareille moyenne ne peut inspirer aucune confiance dans ses dernières décimales. Comment compter sur l'exactitude d'un dix-millième de mètre, quand on n'a que six mesures et que chacune d'elles n'est exacte qu'à un décimètre près? Ces défauts sont fréquents dans les ouvrages qui traitent des sciences d'observation, et dans les statistiques surtout.

Il faut admettre en principe qu'on ne peut pousser la fraction décimale au delà du chiffre où le doute commence. Des physiciens donneront des pesanteurs spécifiques avec un nombre de décimales évidemment plus grand que la sensibilité des balances ne le comporte. Que faut-il en conclure? Faut-il les taxer de charlatanisme ou d'ignorance? C'est le cas de demander avec un célèbre chimiste qui voyait relever une pareille exagération d'exactitude, « de quoi vous plaignez-vous? Il se peut que les derniers chiffres décimaux que vous contestez, soient fort exacts et que les premiers seuls soient fautifs. »

Souvent ce grand nombre de décimales, qui dépasse bien évidemment les limites de l'exactitude, n'est donné que d'après une certaine habitude et sans qu'on puisse alléguer de bonnes raisons pour en justifier l'emploi; nous pourrions en citer des exemples dans plusieurs ouvrages de physique et d'astronomie, dans ceux même qui ont fait le plus d'honneur à notre époque. Les nombres sont donnés tels qu'ils ont été calculés au moyen des tables logarithmiques. Il serait cependant bon de supprimer tous les chiffres inutiles et qui pourraient induire en erreur sur le degré de précision.

La théorie des probabilités indique la limite à laquelle on doit s'arrêter en pareil cas; peut-être sera-t-il plus commode encore de recourir à ce principe si simple, également puisé dans la théorie, que la précision croît comme la racine carrée du nombre des épreuves. Ainsi, quand vous avez pesé un objet plusieurs fois de suite, et que chaque pesée est douteuse dans la première décimale, il convient de ne donner les pesées individuelles qu'avec une seule décimale; leur moyenne pourra avoir deux, trois ou plusieurs décimales, selon que le nombre des observations sera au-dessous de 100, ou de 100 à 10 000, etc. Les degrés de précision en effet sont en général comme les racines 10, 100, etc., par rapport à chaque pesée prise individuellement.

Il est une autre erreur qu'on fait assez généralement dans les ouvrages de statistique et qu'il est bon de signaler en passant. Si je voulais connaître la mortalité du département de la Seine, je comparerais le chiffre des décès d'une année

au chiffre de la population, et le rapport me donnerait la mortalité du département. Je pourrais en faire de même pour tous les autres départements de la France, et j'aurais ainsi ss rapports. Si je voulais maintenant me faire une idée générale de ce qu'est la mortalité en France, faudrait-il prendre la moyenne des ss rapports calculés de cette manière? certainement non. Il faudrait comparer tous les décès du Royaume au chiffre général de la population; en user autrement, ce serait donner la même importance à tous les départements, quelle que fût leur population. La moyenne calculée de cette manière peut différer très-sensiblement de celle qu'on obtiendrait par l'autre calcul.

Il se présente cependant une distinction à faire, qui peut paraître subtile au premier abord, mais qui n'en est pas moins fondée. Dans un cas particulier, c'est la moyenne des ss rapports qu'il faudrait prendre pour chiffre de la mortalité. Ce cas serait celui où l'on voudrait se faire une idée générale de la mortalité dans ses rapports avec les différentes régions de la France; c'est alors bien moins au chiffre de la population qu'il faut avoir égard qu'à l'étendue des départements. Chaque rapport donné par un département prend la même importance, qu'il soit d'ailleurs basé sur un nombre d'observations plus ou moins grand.

LETTRE XXXIX.

Sur la manière de contrôler les documents statistiques.

La plupart des hommes acceptent avec une égale confiance tous les documents statistiques. Quels que soient la source d'où ils proviennent, le mode employé pour les recueillir, le nombre et la valeur des observations, ils leur attribuent la même importance. J'ai souvent entendu citer des résultats statistiques par les gens du monde, mais je ne crois pas avoir jamais ouï demander quelle était leur exactitude, s'ils reposaient sur des observations suffisamment bonnes et assez nombreuses pour pouvoir être admis sans restriction. La même légèreté règne ordinairement dans les écrits. Votre Altesse comprendra cependant que ce défaut de discernement et de critique ne saurait conduire à des jugements sûrs. Pour rendre un édifice solide et durable, l'architecte doit examiner avec soin les matériaux qu'il emploie à sa construction.

Les documents statistiques comportent deux espèces d'examens : un examen moral et un examen matériel. Le premier peut se faire en dehors des renseignements qui ont

été reçus : il s'agit, en effet, de rechercher sous quelle influence ces renseignements ont été recueillis, et d'apprécier la valeur de la source d'où ils proviennent.

Pendant la guerre de l'indépendance, les États-Unis dissimulaient avec soin le véritable chiffre de leur population; ils exagéraient considérablement le nombre des habitants des villes maritimes, pour donner le change à leurs ennemis. Ce ne serait assurément pas sur les documents de cette époque, qu'on pourrait fonder une bonne appréciation de la population américaine.

On se gardera bien aussi d'apprécier l'importance du commerce des dentelles entre la Belgique et la France, d'après les tableaux d'importation que publie annuellement l'administration des douanes. L'élévation des droits d'entrée et la facilité de frauder doivent produire, dans ces tableaux, d'immenses lacunes. Le bon sens suffit pour faire rejeter ou ne recevoir qu'avec une extrême réserve, des chiffres que des intérêts généraux ou particuliers ont dû nécessairement altérer.

On accordera généralement plus de confiance à des données statistiques qu'on peut obtenir facilement et sans froisser aucun intérêt, sans blesser aucune susceptibilité, à celles dont chacun peut apprécier l'utilité et les convenances, à celles surtout qui intéressent le repos des familles et qui sont constatées en vertu de lois. Sous ces divers rapports, les tableaux de l'état civil, en France et en Belgique, doivent

être placés en première ligne, quand l'autorité locale remplit convenablement ses devoirs.

L'ignorance des coutumes et des lois d'un pays conduit quelquefois à de singulières erreurs : ainsi, au moyen de chiffres officiels, M. Sarauw avait prétendu prouver que, dans l'île de Ste-Croix, aux Antilles danoises, la mortalité des nègres esclaves était moindre que celle des blancs, même en Europe; et cette assertion pouvait paraître d'autant plus imposante que M. Sarauw habite l'île dont il est question. Cependant M. le professeur David, de Copenhague, a prouvé que cette opinion, soutenue d'ailleurs de bonne foi, mais contraire à tout ce qui avait été observé jusque là, reposait simplement sur une méprise ou plutôt sur une omission. Dans les colonies danoises, en effet, il existe une capitation sur les nègres; mais une ordonnance du 16 juillet 1778 porte que les enfants nègres qui meurent avant leur première année révolue, sont exempts de cette capitation. Il en est résulté que les enfants au-dessous d'un an n'ont pas été inscrits dans les listes des naissances et des décès de la population noire; et comme d'ailleurs, le chiffre de la mortalité est très-considérable pendant la première année de la vie, la population noire a dû paraître avoir un avantage marqué sur la population blanche.

Avant de prononcer sur les naissances et les décès d'un pays, il est donc bien important de savoir comment les documents sont recueillis et ce qui peut garantir la régularité des inscriptions. Dans plusieurs pays, les naissances

sont relevées sur les registres des paroisses et ne comprennent pas les enfants israélites. Dans quelques états encore, on comprend les mort-nés dans les listes des naissances, dans d'autres, on les en sépare. C'est pour avoir négligé toutes ces circonstances qu'on est arrivé parfois aux résultats les plus étranges.

Quoi qu'il en soit, les documents du mouvement de l'état civil sont généralement ce que la statistique a de plus complet dans les pays civilisés. Les renseignements qui appartiennent à un dénombrement, méritent peut-être moins de confiance, ceux surtout qui concernent les habitations, parce que les administrés qui les donnent, supposent presque toujours à l'autorité des intentions fiscales.

D'une autre part, si les particuliers sont en garde contre le gouvernement, celui-ci établit toutes ses réserves à l'égard des particuliers, et souvent ne leur communique qu'une partie plus ou moins complète, plus ou moins exacte des renseignements qu'il a recueillis. Les données statistiques peuvent donc être altérées dans leur source et dans les canaux qui nous les transmettent. Je ne m'occuperais pas de vérifier les chiffres d'un recensement, si je savais que ce recensement a été entrepris dans le but avoué de faire une levée d'hommes, parce que je suis persuadé qu'une double cause d'erreur domine toute l'opération. J'éviterais aussi de me servir des chiffres des naissances et des décès d'un pays où il me serait prouvé que ces chiffres ne se recueillent d'après aucune marche certaine ni sous aucune garantie.

Bien souvent, malgré le zèle des particuliers et les soins du gouvernement, les tableaux statistiques restent nécessairement incomplets; tels sont ceux des tribunaux, tels sont encore ceux des douanes et des octrois. Il devient difficile alors d'établir, sur ces tableaux, une bonne appréciation morale, qui doit précéder cependant tout autre contrôle.

L'examen matériel des documents statistiques n'exige pas moins de prudence et de sagacité; mais, ici, nous trouvons au moins quelques règles pour nous guider, et surtout quand il s'agit de renseignements qui peuvent se traduire par des nombres, renseignements dont la statistique fait le plus fréquent usage.

Il faut, avant tout, que les nombres que l'on compare, soient assez grands, pour qu'on ait des raisons de croire qu'ils ne sont plus sous l'influence des causes accidentelles. Tous les résultats n'exigent pas le même nombre d'observations pour présenter le même degré d'exactitude : ainsi, comme je l'ai fait observer déjà, il faudrait bien plus d'observations pour constater la prépondérance d'un sexe dans les naissances, que pour établir l'efficacité de la vaccine contre la petite vérole, ou l'influence de l'âge sur les décès.

Quelque grand que soit le nombre des observations, il devient insuffisant, quand on a des raisons de croire que des causes périodiques, ou une cause accidentelle très-prépondérante, a pu l'influencer. Si l'on voulait connaître, par exemple, la mortalité de la France, bien que le chiffre des décès pour une année soit considérable, il serait imprudent

de s'en contenter, parce que des maladies auraient pu fortuitement en augmenter la valeur. Une année peut être funeste pour les hommes comme pour les fruits de la terre; il faudrait employer les résultats de deux années au moins. Cependant ce même nombre de décès, quand il s'agit de la mortalité d'une ville ou même d'un département, serait plusque su ffi sant, parce qu'il serait le produit de plusieurs années dont les influences accidentelles ont pu se compenser.

En général, pour reconnaître, sans recourir aux théories mathématiques, le degré de précision auquel on est parvenu dans le calcul d'une moyenne, il suffit de partager l'ensemble des valeurs observées en deux ou plusieurs groupes, dont on prend séparément les moyennes; et si ces moyennes diffèrent peu entre elles, on peut les regarder comme étant très-précises.

J'ai déjà suffisamment fait connaître les usages de la table de précision, quand on veut déterminer l'exactitude d'une moyenne, je crois pouvoir me dispenser d'en parler encore. Je ferai remarquer seulement qu'il convient de vérifier, en même temps que la moyenne, les limites extrêmes entre lesquelles elle se trouve comprise.

Les vérifications matérielles doivent porter jusque sur les chiffres : il est même prudent de faire précéder toute discussion de l'examen des additions. Je demande pardon à Votre Altesse de l'entretenir de détails aussi minutieux; mais on a souvent lieu de regretter d'avoir omis ces petites précautions préliminaires, et de se voir forcé de revenir sur des

résultats que l'on croyait exacts. Quand une colonne contient beaucoup de chiffres, il sera avantageux, après l'addition générale, de faire deux additions partielles dont les sommes doivent reproduire ensemble le chiffre général. Quelquefois les additions des colonnes verticales se vérifient par celles des colonnes horizontales.

Après ces diverses vérifications, il faudra examiner soigneusement la continuité des nombres qui expriment une même chose, rechercher s'ils présentent des changements brusques; et, dans le cas où il s'en trouve, apprécier s'ils sont dus à des erreurs de chiffres ou bien à des causes accidentelles. Ainsi, quand j'étudie la mortalité d'une ville, j'examine rapidement la série des nombres des décès annuels dont se compose la période qui m'occupe : si je crois trouver un chiffre ou trop fort ou trop faible, je vérifie mes calculs; s'ils sont bons, je vérifie les sources où les nombres originaux ont été puisés. Si je les trouve exacts encore, je recherche si l'écart remarqué peut être attribué à des causes accidentelles ou s'il dépend de causes constantes.

Cette étude est singulièrement facilitée par des constructions graphiques. Une simple ligne permet d'apprécier d'un seul coup d'œil une succession de chiffres, que l'esprit le plus délié aurait peine à retenir et à comparer. La facilité qu'on a pour saisir ainsi une série de résultats et pour en reconnaître la marche, est telle qu'on peut suivre en même temps une série de résultats d'un autre ordre, et juger, par les inflexions communes des lignes, des rapports qui existent entre les

éléments que l'on compare, et des causes communes qui ont pu les modifier simultanément.

Les constructions graphiques n'offrent pas seulement un soulagement à l'esprit, elles donnent encore à l'étude des phénomènes le même avantage que l'algèbre a introduit dans le calcul; elles généralisent et permettent d'abstraire.

S'agit-il, par exemple, de rechercher l'influence que le prix des grains a pu exercer sur le mouvement de la population, on construira quatre lignes qui, par leurs ondulations, exprimeront les fluctuations observées, d'année en année, dans les prix des grains, ainsi que dans les nombres des naissances, des décès et des mariages. On reconnaîtra généralement que, quand le prix des grains s'élève, le nombre des décès augmente, et ceux des naissances et des mariages diminuent; en sorte que les deux premières lignes présentent un certain parallélisme; et il en est de même des secondes, mais dans un sens contraire aux premières. Comme cependant le prix des grains n'est pas ici le seul élément influent, et que d'ailleurs les naissances, les décès et les mariages ne sont pas également affectés par les mêmes causes, les inflexions des lignes ne répondent pas toujours aux mêmes époques. On a donc le précieux avantage d'apercevoir du premier coup d'œil les moindres anomalies et de pouvoir facilement en rechercher les causes, soit que ces anomalies proviennent d'erreurs, soit qu'on doive les attribuer à des causes réelles qui ont laissé des traces dans l'état social.

Il faut du reste ne pas perdre de vue que les causes influentes ne produisent pas toujours immédiatement leurs effets. On a reconnu, par exemple, que les traces des années de disette ou d'abondance ne sont marquées dans le mouvement de la population qu'à une année environ de distance. Quelquefois même des causes actives ne produisent leurs effets que beaucoup plus tard encore.

Malgré les objections qui ont été faites contre les méthodes graphiques, par quelques écrivains qui ont été peut-être trop frappés des abus auxquels elles ont donné lieu, je pense qu'on ne saurait assez les recommander, quand il s'agit de contrôler des séries de nombres influencés par des causes communes et de prendre un aperçu général du mode d'action de ces causes.

LETTRE XL.

Manière de mettre en usage les documents statistiques.

Quand on a constaté avec soin qu'une série de documents mérite moralement toute confiance, et que les chiffres ont été soumis à une vérification rigoureuse, il reste à en faire usage.

Il serait absurde en effet de réunir laborieusement des données statistiques dans le seul but d'en grossir des volumes. On peut alors se borner à constater simplement les résultats déduits des documents que l'on compare, ou bien interroger les chiffres dans un but déterminé, pour éclaircir une question spéciale.

Dans le premier cas, les documents numériques seront groupés dans les divers arrangements qu'ils comportent, et de manière à mettre en évidence les causes qui pourraient les modifier. En faisant ces arrangements, il faudra se prémunir contre toute idée préconçue sur la nature du résultat final. Il est inutile d'ajouter qu'il convient de s'assurer si ce résultat final repose sur un nombre assez grand d'observations pour qu'on puisse avoir égard à sa valeur. Si l'on a pris

toutes ces précautions, on n'a, en définitive, établi qu'un fait, qu'il faut savoir interpréter.

C'est déjà beaucoup sans doute; mais il reste encore à donner l'explication du fait et à remonter à la connaissance des causes qui l'ont produit. Cette recherche peut offrir de grandes difficultés, surtout si l'on se propose d'apprécier le degré d'énergie des causes. Pour me faire mieux comprendre, j'aurai recours à un exemple: je suppose que je ne possède d'un pays que les résultats d'un bon recensement, et je vais tâcher d'indiquer quelques-unes des conclusions qu'on en pourra déduire.

J'admets que l'on a fait, avant tout, un examen soigneux des documents du recensement, soit sous le rapport moral, soit sous le rapport matériel, et qu'on a complétement lieu d'être rassuré sous ce double point de vue.

L'idée qui se présentera d'abord sera de séparer le chiffre total de la population en deux parties indiquant le nombre des hommes et celui des femmes. Ces deux nombres diffèrent généralement peu dans les pays d'une certaine étendue. Après en avoir établi le rapport général, il faudra rechercher ce qu'il devient dans les différentes parties du pays; ainsi, en Belgique, il faudra calculer quelle est sa valeur dans chacune des neuf provinces.

Si le rapport est sensiblement le même, on aura lieu de croire que le recensement a été homogène et que le résultat observé mérite confiance; car la probabilité que les neuf

rapports sont sensiblement les mêmes et d'une manière purement accidentelle, est extrêmement faible.

Si le rapport diffère d'une province à l'autre, il faut en rechercher les causes. Les principales peuvent être la nature du recensement, la petitesse des nombres que l'on compare, une cause purement locale, etc. L'examen préalable des documents statistiques a dû nous éclairer sur la première cause d'erreur présumée. Pour les autres, on pourrait fractionner les nombres davantage, et rechercher où et comment le rapport se modifie en passant de proche en proche de l'une des provinces à l'autre. Si cette recherche laisse encore des doutes, le reste de la discussion pourra aider à les lever.

Une grande différence numérique des sexes, en passant d'une province à une autre, annonce dans la population un défaut d'homogénéité, qui doit nécessairement se manifester encore sous d'autres rapports : ainsi, le recensement fera connaître le classement de la population par âges, dans chacune des provinces, avec la distinction des sexes. Ce nouveau classement permettra de reconnaître, dans le cas d'un excès numérique d'un sexe sur l'autre, à quels âges la lacune se fait le plus particulièrement remarquer.

L'industrie et le commerce peuvent altérer les proportions ordinaires et appeler un plus grand nombre d'hommes dans de certaines localités. A Saint-Pétersbourg, le nombre des hommes surpasse considérablement celui des femmes, mais

cette circonstance tient à l'état de domesticité, qui n'est pas, en Russie, le même que chez nous.

La classification par âges n'offre pas seulement le moyen de vérifier les détails du recensement sous le rapport des sexes, elle donne les renseignements les plus précieux sur la valeur intrinsèque de la population, et permet de se faire des idées justes sur l'estimation de la partie utile qui la compose. Deux pays peuvent compter 4 000 000 d'habitants chacun, et se trouver dans des positions bien différentes quant à la valeur de ces populations. Il faut donc reconnaître l'élément utile qui y prédomine, c'est-à-dire la quantité comparative d'individus adultes.

Je puis, sans idées préconçues, partager la population de chaque province en trois grands groupes, les enfants, les personnes dans la force de l'âge, et les vieillards, afin de ne pas descendre à des catégories trop faibles. Si ces trois classes d'individus se trouvent partout sensiblement dans le même rapport, c'est une nouvelle preuve de l'homogénéité de la population et de la bonté du recensement. S'il se présente des différences notables, il faut en rechercher les causes.

Dans l'examen du recensement, on ne perdra sans doute pas de vue l'influence du séjour des villes et des campagnes sur les âges et sur les sexes. Le passage d'une province à une autre présente cet avantage que l'on fractionne le nombre général en plusieurs séries qui peuvent se servir de contrôle mutuel.

Il en sera de même pour l'état civil. Les nombres relatifs qui indiqueront les célibataires, les mariés et les veufs, pour l'un et pour l'autre sexe, devront être examinés avec le plus grand soin.

Dans un royaume où les habitants se trouveraient partout identiquement dans les mêmes circonstances, on pourrait dire *à priori* que toutes les catégories que je viens de désigner, devraient être proportionnellement les mêmes, sauf les petites inégalités introduites par des causes accidentelles; et réciproquement, si les catégories sont les mêmes et les nombres assez grands pour laisser supposer que les causes accidentelles y ont peu d'influence, on en peut déduire que les habitants y vivent dans les mêmes conditions. Si les éléments sont essentiellement différents, c'est qu'ils sont influencés par des causes locales, et ces causes sont d'autant plus énergiques que les éléments sont plus dissemblables. L'étude des éléments les plus modifiés donne en général les moyens de reconnaître les causes actives et leur degré d'énergie.

Cet exemple pourra donner une première idée de la manière de discuter une série d'observations et de reconnaître les conséquences diverses auxquelles elle conduit. Je n'insisterai pas sur toutes les autres combinaisons que l'on pourrait faire avec les chiffres d'un recensement bien coordonné.

Je supposerai maintenant que j'interroge les chiffres du recensement dans un but déterminé et pour éclaircir une

question spéciale. Ce genre de discussion est plus difficile et exige plus de réserve encore que celui qui vient de nous occuper. J'admettrai, par exemple, que je n'emploie les chiffres du recensement que dans le but de reconnaître jusqu'à quel point l'industrie peut être avantageuse à un pays. Votre Altesse conçoit qu'il ne s'agit ici que de l'état physique de la population.

Si tout le pays se livrait également à l'industrie, la question serait à peu près insoluble, puisque, des deux éléments de comparaison, l'un manquerait. On pourrait, cependant, si le recensement constatait les professions, former deux ou trois grands groupes; les industriels, par exemple, les agriculteurs et les autres habitants. Ces groupes comprendraient les individus de chaque catégorie avec leurs femmes et leurs enfants. Puis, on établirait entre eux les mêmes comparaisons que celles qui ont été indiquées précédemment, soit pour constater les différences des sexes, des âges, de l'état civil, soit encore pour reconnaître le nombre proportionnel de ceux qui vivent aux dépens de la charité publique, comme cela a été pratiqué dans le recensement de la population de Bruxelles, en 1843.

Plus généralement, un pays présente une partie industrielle et une partie agricole; c'est alors entre ces deux fractions de la population que la comparaison doit s'établir; mais il faut écarter avec soin les causes étrangères qui pourraient mêler leur influence à celle des causes que l'on veut déterminer.

Il est quelques écueils à éviter, sur lesquels sont venus échouer plusieurs statisticiens trop peu en garde contre les écarts de leur imagination. Les principaux sont les suivants :

1° Avoir des idées préconçues sur le résultat final;

2° Négliger des chiffres qui contrarient le résultat qu'on voudrait faire prévaloir;

3° Énumérer incomplétement les causes et n'attribuer qu'à une seule cause ce qui appartient au concours de plusieurs;

4° Comparer des éléments qui ne sont pas comparables.

Je parlerai plus en détail de chacune de ces causes d'erreur. Cette tâche sera peut-être bien difficile à remplir, surtout si je fais un retour sur moi-même, car je ne garantis pas que Votre Altesse ne puisse pas trouver, dans mes propres ouvrages, des exemples de ce que je serai dans le cas de devoir blâmer. Du reste, je n'ai pas à m'occuper ici de questions personnelles ; il s'agit bien moins, en effet, de savoir si je me suis trompé autrefois, que de reconnaître si je puis avoir raison aujourd'hui.

LETTRE XLI.

Il faut faire de la statistique sans idées préconçues et ne négliger aucun chiffre.

Les sciences naissantes subissent les mêmes phases; elles plaisent par leur nouveauté; chacun se croit appelé à leur donner son patronage et à s'associer à leurs premiers succès. Elles ont surtout un puissant attrait pour les gens du monde qui sont charmés de se donner des airs scientifiques, sans avoir à faire une trop grande dépense d'esprit et sans devoir pâlir sur des livres. Une science nouvelle d'ailleurs n'a point d'annales, elle suppose peu de faits à étudier, peu d'ouvrages à lire; on est bientôt au courant de tout ce qu'elle peut nous apprendre. Aussi la géologie, l'économie politique, la statistique ont eu sucessivement de nombreux prosélytes, surtout parmi les rêveurs de toute espèce qui ont voulu les faire servir à étayer leurs utopies.

Bien des personnes en effet n'ont recours à la statistique, que pour tâcher de donner de la consistance à des systèmes préconçus; elles enveloppent leurs idées d'un voile scientifique, dans l'espoir de les rendre plus imposantes. On les voit alors employer, sans examen, tous les documents qui

semblent favorables à leurs vues, et rejeter les autres comme peu dignes de confiance. En agissant ainsi, quelques-unes même peuvent être de bonne foi, et ne pécher que par ignorance.

Avec un éclectisme pareil, on peut trouver dans la statistique les moyens de défendre à peu près toutes les thèses. Ce sont ces abus de la science qui ont fait naître tant de doutes sur son utilité. S'il surgit en médecine quelque système nouveau, on ne tarde pas à voir paraître presque en même temps des résultats de clinique, pour prouver soit son excellence, soit sa nullité. D'une part, toutes les guérisons se trouvent citées avec soin et les insuccès sont écartés sous différents motifs plus ou moins spécieux; d'une autre part, on ne semble avoir de mémoire que pour les cas défavorables.

C'est en politique surtout que la statistique devient un arsenal redoutable, où les parties belligérantes vont également choisir leurs armes. On peut accommoder ces armes à tous les systèmes d'attaque et de défense. Quelques chiffres jetés avec assurance à travers une discussion, ont quelquefois servi de rempart contre les plus solides raisonnements; et, quand on venait à les examiner de plus près, on en reconnaissait la faiblesse et la nullité. Ceux qui s'étaient laissé effrayer par de pareils fantômes, au lieu de s'en prendre à eux-mêmes, aimaient mieux accuser la science que de confesser leur aveugle crédulité, ou leur insuffisance pour combattre les armes perfides qu'on leur avait opposées.

Pendant les combats les plus désastreux de l'empire, on avait entrepris de démontrer, au moyen de chiffres, que la guerre est favorable au développement de la population, et que le peuple français n'avait jamais été dans un état plus prospère. Cependant on décimait annuellement la fleur de la nation; et ceux qui échappaient au danger, chargés de travaux et de fatigues, venaient terminer dans leurs foyers une vieillesse anticipée. En parcourant les listes de la population, on y trouve, encore aujourd'hui, les vides que la guerre y a laissés.

Au reste, qu'on accumule de mauvais documents, qu'on en fasse un déplorable usage, ce sont de ces inconvénients dont les autres sciences ne sont pas plus exemptes que la statistique. Seulement les exemples sont moins nombreux, parce que la route est déjà mieux tracée et qu'on a plus de points de repère pour reconnaître si l'on s'en écarte.

Dans les documents statistiques, il ne faut négliger aucun chiffre qui se rattache à une même question, à moins qu'on n'ait des raisons de douter de sa valeur, ou qu'il soit trop faible pour qu'on puisse s'en servir utilement. Dans ce cas même, il sera nécessaire de faire connaître les motifs qui ont pu en motiver l'abandon.

On voit des personnes, profondément convaincues d'une vérité, chercher à l'établir directement par l'autorité des chiffres, et à en donner, comme elles pensent, une démonstration mathématique. Cependant, au moyen des documents statistiques qu'elles emploient maladroitement, le plus sou-

vent elles produisent un effet tout opposé à celui qu'elles espéraient. Ainsi, l'on ne peut raisonnablement révoquer en doute que le développement des lumières ne contribue au bonheur des hommes, en éclairant l'intelligence et en fortifiant le moral. Pour tâcher d'en donner la démonstration, qu'a-t-on fait? on a cru devoir établir que le nombre des crimes est inverse du nombre des enfants envoyés aux écoles; comme si le nombre des crimes, fût-il même connu, avait pour cause unique le développement plus ou moins grand de l'intelligence, et comme si le développement de l'intelligence se mesurait sur le nombre des enfants envoyés aux écoles. Qu'est-il résulté de là? on a trouvé, après avoir bien examiné les documents statistiques, que le nombre des crimes est plus généralement en rapport direct avec le nombre des enfants envoyés aux écoles, qu'en rapport inverse. On en a conclu tout l'opposé de ce qu'on avait voulu établir d'abord. Erreur nouvelle que quelques personnes ont admise avec la même légèreté.

J'ai déjà eu l'occasion de le faire observer à Votre Altesse, les phénomènes qui se rapportent à l'homme et à l'état social, sont très-complexes; ils se modifient sous l'influence d'une infinité de causes diverses qu'il faut reconnaître et étudier avec soin. La plupart des erreurs accréditées par les statisticiens proviennent d'une énumération incomplète de ces causes, et de l'insuffisance où l'on se trouve presque toujours de faire à chacune d'elles la part d'importance qui lui appartient.

La moralité d'un peuple n'est pas une chose qu'on puisse apprécier directement; on ne peut en juger que par ses effets. Quand on voit un barreau d'acier, il serait impossible de dire si c'est un aimant, et surtout d'en fixer le degré d'énergie; il faut nécessairement recourir à l'expérience. Or, la moralité se constate par des actions bonnes ou mauvaises; et jusqu'à présent, pour estimer la moralité d'un peuple, on s'en est tenu généralement à l'examen des mauvaises actions; encore, parmi celles-ci, on n'a pris en considération que celles qui étaient frappées par les lois sous les noms de crimes et de délits. Dans ma prochaine lettre, je me propose de montrer combien ces derniers renseignements laissent encore à désirer et combien ils sont incomplets, même dans les pays où ils sont recueillis avec le plus de soin. Je ne veux m'occuper ici que des causes qui peuvent donner naissance aux crimes.

L'homme apporte en naissant toutes les tendances qui peuvent le faire dévier de la ligne de ses devoirs; ces tendances se développent et se modifient ensuite sous l'influence du milieu dans lequel il se trouve; la première éducation d'abord, ses principes religieux, l'exemple des parents, le degré d'aisance, les besoins qu'il se crée plus tard, ses relations, l'état de ses lumières, sa profession, les habitudes et la législation des lieux qu'il habite, doivent être considérés comme autant de causes qui le rapprochent ou l'éloignent de l'abîme où il peut se perdre. Quand il s'agit d'une personne en particulier, il serait impossible de dire *a priori*

quelle est la cause qui influe le plus puissamment sur elle pour la précipiter vers le mal; ce n'est qu'après l'avoir vue succomber et en étudiant sa conduite antérieure, qu'on peut reconnaître la cause qui l'a le plus particulièrement égarée. Si une pareille étude, faite avec soin et sans prévention, amenait à conclure que chaque crime a toujours eu la même cause, le manque d'instruction par exemple, il faudrait bien finir par admettre que cette cause est celle qui détermine les crimes, et que les autres causes présumées sont sans influence; mais il n'en est pas ainsi. On voit successivement dominer une infinité de causes, à la vérité avec des degrés de fréquence et d'énergie bien différents.

Il ne s'agit donc pas, en étudiant les crimes d'un pays, de n'y chercher qu'une seule cause influente qui prédomine et efface toutes les autres ; il faut savoir embrasser le problème dans toute sa généralité. L'état des lumières est certainement un élément très-influent; mais on ne peut l'isoler sans imprudence, parce que le plus souvent son influence est effacée par celle d'autres causes plus actives. Il existe même des crimes qui supposent, pour conditions essentielles chez ceux qui les commettent, un degré de lumières assez élevé.

C'est donc à tort que des personnes ont cru voir exclusivement dans l'absence de lumières la cause générale des crimes, et surtout qu'elles ont pris, pour mesure des lumières, le nombre des enfants envoyés aux écoles, sans s'occuper même de ce qu'on y enseignait. La thèse contraire est plus absurde encore : de ce que dans quelques provinces

ou dans quelques villes, le nombre des crimes s'est trouvé être directement proportionnel au nombre des enfants envoyés aux écoles, on a cherché à insinuer que le développement des lumières était contraire au développement de la moralité. On n'a pas pris garde que, dans ces localités, le grand nombre des crimes avait généralement pour cause une agglomération plus grande d'habitants et de richesses, qui facilitait les crimes contre les personnes et contre les propriétés, en même temps qu'elle expliquait une plus grande fréquentation des écoles.

Il faut remarquer d'ailleurs que le nombre des crimes peut dépendre autant du degré de moralité des habitans que de la législation même d'un pays. Il a suffi quelquefois de la réforme de certaines lois, pour amener la suppression d'une classe entière de crimes, ou du moins pour opérer des réductions considérables dans leur nombre.

On s'est trop hâté de conclure; et, en voulant faire plier complaisamment la statistique à la démonstration de problèmes dont elle n'avait pas les éléments de solution, ou qu'elle n'était pas appelée à résoudre, on lui a fait un tort considérable. Les esprits même les plus judicieux ne distinguent pas toujours l'abus qu'on fait d'une science, de l'impuissance où elle se trouve de résoudre certaines difficultés.

LETTRE XLII.

Peut-on tirer avantage de documents statistiques incomplets?

J'ai dit qu'il ne faut négliger aucun chiffre qui se rattache à une même question. Mais il se présente, ici, une objection assez forte contre la plupart des documents qu'on trouve dans les statistiques et contre les résultats qu'on en peut déduire : c'est que ces documents sont presque toujours incomplets.

Le chiffre de la population est sans contredit l'élément statistique le plus important; cependant je ne pense pas qu'il existe un seul pays au monde où cet élément soit bien connu. Je ne parle pas même d'une précision mathématique; mais d'une exactitude telle, qu'on puisse l'admettre dans les sciences d'observation.

Chaque science, en effet, comporte une certaine exactitude qu'on peut reconnaître par le degré d'approximation auquel elle parvient dans ses mesures. L'astronomie, qui passe pour opérer avec le plus de précision, peut déterminer la position des astres, sans avoir à craindre des erreurs qui s'élèvent à plus d'un à deux dixièmes de seconde en arc. Or, une pareille erreur, par rapport à une circonférence ou par rapport à

360 degrés pris comme unité, tomberait à la cinquième ou sixième décimale.

Au moyen d'une bonne balance, construite pour peser environ un kilogramme, on apprécie des différences de 1 milligramme; et la sensibilité de l'instrument s'étend ainsi jusqu'à la sixième décimale, en prenant pour unité le corps pesé.

La pesanteur spécifique des corps ne s'obtient qu'avec une exactitude qui va jusqu'à la quatrième ou cinquième décimale; il en est à peu près de même des dilatations linéaires des corps.

L'intensité magnétique de la terre ne se mesure exactement que jusqu'à la troisième ou quatrième décimale. On peut admettre qu'en général les divers éléments dont on apprécie les grandeurs dans les sciences d'observation, ne sont déterminés avec précision que jusqu'à la quatrième ou cinquième décimale.

Pour procéder avec la même exactitude, il faudrait donc qu'un recensement ne fût pas en erreur de plus d'un à deux individus sur 10 000 recensés; ou, pour une population de quatre à cinq millions d'habitants, comme celle de la Belgique, que l'erreur n'allât pas à 1000 personnes, et pour la France, à 8000. Or, nous sommes bien loin encore d'atteindre à cette précision; et, je tiens, quant à moi, que la population de la Belgique est estimée au-dessous de sa valeur réelle d'environ le dixième de cette valeur. Ce doute porterait donc sur la deuxième décimale et peut-être même sur la première. Les

naissances, les décès et les mariages sont mieux constatés ; et je pense que leur chiffre atteint à peu près le degré d'exactitude désirable.

Dans cet état de choses, faut-il rejeter tous les résultats dans lesquels entre le chiffre de la population, bien qu'étant évidemment fautif. Je ne le crois pas ; surtout quand il s'agit moins de valeurs absolues que de quantités relatives. En Belgique, par exemple, quand il s'agit de faire la répartition des contingents des milices, on demande à chaque province un nombre de miliciens en rapport avec la population présumée. Mais, si l'on a lieu de croire que la population présumée est partout inférieure à la population réelle dans le même rapport, il est évident que la répartition faite sera tout aussi bonne que si le nombre des habitants était exactement connu. Il en serait de même pour la fixation d'impôts qui auraient également la population pour base.

Il est un autre exemple bien frappant où des documents incomplets peuvent néanmoins être utiles. Je veux parler de ceux qui appartiennent à la statistique criminelle.

Quels sont en effet les principaux documents que nous possédons, pour juger de la moralité d'un peuple? les comptes rendus de la justice seulement; encore ces comptes rendus ne font-ils connaître que les crimes poursuivis devant les tribunaux. Or, on peut partager les crimes d'un pays en trois catégories principales : ceux qui sont connus ainsi que leurs auteurs; ceux qui sont connus, mais dont les auteurs sont restés inconnus; enfin ceux qui sont restés totalement

inconnus à la justice. De tous ces crimes, nous ne connaissons que ceux qui appartiennent à la première catégorie. On peut se demander alors s'il est possible de faire usage de documents aussi incomplets.

J'admets sans discussion que les crimes d'un pays, s'ils étaient tous connus, peuvent suffire pour résoudre la question qui nous occupe. J'accepte cette hypothèse pour simplifier les choses; j'admets même que tous les crimes ont la même gravité.

Maintenant quelle utilité peut-on retirer de la connaissance des seuls crimes qui ont été portés devant les tribunaux? Aucune, je crois, à moins que cette portion connue ne reste toujours la même par rapport au nombre total. En Belgique, on compte annuellement trois à quatre cents crimes devant la cour d'assises, mais ce n'est peut-être que le dixième des crimes annuellement commis. Or, si j'étais bien convaincu que ce nombre de crimes portés devant les tribunaux, demeurât toujours le dixième de tous les crimes commis, je pourrais juger, chaque année, si le nombre des crimes augmente ou diminue. Nous sommes donc conduits à admettre qu'il existe un rapport constant qui donne la mesure de l'*activité de la justice*, rapport auquel il faut avoir égard, si nous voulons comparer la Belgique à elle-même à différentes époques; si nous voulons la comparer à un autre pays, il faudra connaître également l'activité de la justice dans ce dernier pays.

D'abord le rapport est-il constant? Je n'hésiste pas à ré-

pondre affirmativement; du moins on peut le regarder comme tel, si toutefois les poursuites judiciaires continuent à se faire avec la même activité; si la statistique enregistre les faits avec la même exactitude, si des réformes dans les lois ne changent pas les peines et ne tendent pas à correctionaliser certains crimes, si l'état du pays enfin ne subit pas de modifications essentielles; les causes étant les mêmes, les effets resteront les mêmes également. La reproduction régulière des mêmes faits se fait observer dans ce qui est connu, comme dans ce qui ne l'est pas. Ces idées, je les avais émises avant que l'expérience vînt les démontrer au moins en partie.

La Belgique, avant 1830, ne donnait que le nombre officiel des crimes connus et poursuivis; elle a publié depuis, pour les sept années de 1833 à 1839, le nombre des crimes connus, mais qui sont restés sans poursuite parce que les auteurs étaient inconnus. Or, ce dernier nombre a procédé, d'année en année, avec plus de régularité encore que celui des crimes poursuivis; nul doute que la troisième catégorie ne présentât la même régularité, si l'on parvenait jamais à la connaître.

Pendant les sept années dont je viens de parler, 140 crimes contre les personnes ont été déférés annuellement devant les tribunaux, et 64 sont restés sans poursuite parce que les auteurs n'ont pas été connus. Ce dernier nombre est au premier comme 1 à 2 environ. Le nombre moyen des crimes contre les propriétés connus et poursuivis a été de 276, et celui des crimes connus et non poursuivis de 674. Ce dernier

nombre est ici le plus grand; il est à peu près triple de l'autre. Les crimes contre les personnes étant les plus graves, ce sont aussi ceux dont les auteurs peuvent le mieux être découverts; il n'est donc pas étonnant de voir une aussi grande différence entre les rapports. On peut admettre en général que les crimes ont d'autant moins de chances d'être reconnus et poursuivis, qu'ils sont moins graves.

Votre Altesse voit aussi qu'en les prenant sans distinction, sur 1154 crimes qui ont été connus annuellement par la justice, 416 seulement, ou un peu plus du tiers, figurent dans les comptes rendus de la justice.

Je ne crois pas exagérer en disant que le nombre des crimes commis, et dont la justice a eu connaissance, n'est pas supérieur à celui des crimes qui sont restés complétement inconnus. D'après cette estimation, on ne verrait figurer dans les comptes rendus que le sixième environ des crimes commis en Belgique. Or, c'est avec cet élément statistique si défectueux que nous jugeons de la moralité du pays.

J'ignore absolument et je ne saurai jamais si le nombre des crimes sur lesquels les tribunaux ont à prononcer, forment le sixième, le septième ou telle autre partie que l'on voudra du nombre total des crimes. Ce qu'il m'importe de savoir, c'est que ce rapport ne varie pas d'une année à l'autre. Dans cette hypothèse, je puis juger *relativement* si une année a produit plus ou moins de crimes qu'une autre.

Je puis même comparer les provinces entre elles, toutefois

en admettant que le rapport demeure invariable non-seulement d'une année à la suivante, mais encore d'une province à l'autre, et que la justice met partout la même activité à poursuivre les coupables. Dans un même royaume, surtout, dans des provinces qui ont beaucoup de similitude, ces comparaisons peuvent s'établir sans trop d'inconvénients; mais il n'en est peut-être pas de même pour des provinces très-éloignées l'une de l'autre et de mœurs très-différentes. Il y aurait peu de chances pour l'invariabilité du rapport.

Les comparaisons deviennent bien plus difficiles, quand il s'agit de pays absolument différents. Les éléments alors n'offrent plus rien de comparable, et l'on se trouve réduit à faire des hypothèses plus ou moins hasardées. Voilà ce qu'ont trop perdu de vue les auteurs qui se sont occupés de comparer les peuples sous le rapport de la moralité et en ne faisant usage que de leurs documents statistiques, traduits en nombres.

Ce qui précède peut faire comprendre aussi pourquoi, quand il s'agit de la moralité, il faut avoir égard plutôt au nombre des crimes et des accusés qu'à celui des condamnés; quand un crime est constaté, si l'acquittement a lieu, il n'en reste pas moins établi qu'il y a eu crime.

En résumé, on doit admettre que les documents statistiques n'expriment que d'une manière plus ou moins approchée, des valeurs réelles à la connaissance desquelles ils doivent suppléer. Quelquefois ces documents représentent avec un degré d'approximation très-grand les chiffres qu'ils

remplacent : tels sont en Belgique ceux des naissances, des décès, des mariages. Quelquefois ces données ne sont connues que dans des limites plus ou moins larges, comme les naissances et les décès, en Russie, en Turquie, en Grèce; il faut alors beaucoup de circonspection dans leur emploi.

Il peut arriver encore, comme pour les statistiques criminelles, que les valeurs connues soient de beaucoup inférieures aux valeurs réelles. Il est impossible, dans ce cas, à moins qu'il n'existe entre elles un rapport déterminé et constant, de suppléer aux secondes par l'emploi des premières.

LETTRE XLIII.

Il ne faut comparer que des éléments comparables.

Assez souvent, dans les ouvrages statistiques, on compare entre elles des choses qui ne sont pas comparables; on peut arriver ainsi aux résultats les plus absurdes. C'est ce que je vais tâcher de faire comprendre par quelques exemples particuliers.

Je me trouve actuellement à Paris, et je m'en félicite, car un de mes amis, dans un élan patriotique, m'a démontré mathématiquement, comme on a l'habitude de le dire, que la capitale, sous le rapport de la moralité, se trouve tellement en voie de progrès, que bientôt on n'y commettra plus de crimes. Il est vrai qu'un autre ami, qui fait également de la statistique dans ses instants de loisir, m'a démontré, avec un luxe effrayant de chiffres, que certaines rues de Paris sont en proie à une mortalité qui dépasse de beaucoup celle produite par les pestes les plus désastreuses; mais, par forme de consolation, il m'a fait voir que le boulevard où j'ai choisi ma demeure, offre une salubrité telle qu'il pourrait presque garantir l'immortalité à ceux qui l'habitent. Et, par

immortalité, je n'entends pas ici cette chimère que rêvent les poëtes et les artistes, mais bien cet heureux privilége d'échapper au torrent des siècles qui dévore tout, et de s'asseoir sur la rive, paisible spectateur des misères et des naufrages des autres.

Les démonstrations de ces beaux résultats méritent bien d'être rapportées. Elles pourront donner le secret d'autres propositions non moins extraordinaires, qui ont été prouvées à l'aide de la statistique.

Commençons par l'immortalité : c'est un avantage si précieux que je crois devoir m'en occuper d'abord. Mon voisinage compte 300 habitants; il en est mort deux dans l'espace d'une année, la mortalité est donc de 1 sur 150 (je parle d'après mon ami le statisticien); s'il n'en était mort qu'un seul, la mortalité eût été de 1 sur 300! C'était déjà un fort beau résultat; mais, s'il n'en était pas mort du tout, et la chose était possible, il aurait donc fallu en conclure que la partie du boulevard où je loge, est le séjour de l'immortalité.

J'aurais tout lieu de me féliciter de mon habitation, si, dans son proche voisinage, ne se trouvait une rue qui peut donner matière à bien des réflexions. La mortalité y est de 1 sur 10; c'est-à-dire plus effrayante que dans bien des hôpitaux (c'est encore mon ami qui l'a prouvé par ses chiffres), car on y a compté, pendant une année, deux décès comme sur mon boulevard, mais la rue ne compte que vingt habitants! Que dire? que penser? les chiffres sont malheureusement très-exacts, et le calcul ne l'est pas moins. Existe-t-il donc réelle-

ment une disproportion si grande entre mon boulevard et la malheureuse rue dont je viens de parler? Attendons, pour y répondre, la fin de l'année prochaine, et peut-être les choses seront-elles changées du tout au tout. C'est ainsi qu'on peut s'égarer en opérant sur des nombres trop petits, et en les comparant, quand ils ne sont pas dégagés des effets des causes accidentelles.

La méprise que je viens de signaler, peut paraître grossière, et cependant si l'on veut y prendre garde, une quantité d'ouvrages en présentent des exemples frappants; je citerais surtout des ouvrages de médecine, si les citations pouvaient être utiles. On ne s'occupe presque jamais de rechercher la confiance que mérite un résultat; et le principe que l'on perd le plus souvent de vue, c'est que, toutes choses égales, la précision croît comme la racine carrée du nombre des observations; et, quand les observations sont trop peu nombreuses, qu'il faut éviter d'en faire usage.

C'est ici le lieu d'indiquer quelques autres sources d'erreurs que n'ont pas toujours su éviter ceux qui ont écrit sur la population.

Il ne faut pas oublier que la mortalité absolue se calcule d'après deux éléments qui sont loin d'être connus avec toute la précision désirable. En Belgique, par exemple, le chiffre de la population est fort mal déterminé; il n'a point été fait de recensement depuis près de 13 ans. J'ai tout lieu de croire que le chiffre de la population est d'un dixième environ au-dessous de sa valeur réelle, et j'ai cherché à en donner les preuves

ailleurs *. Si un recensement bien fait venait confirmer mes conjectures, il en résulterait qu'en 1842 le chiffre de la population aurait été de plus de 4 550 000 habitants, et la mortalité ne serait que de 1 sur 44,3 ou même de 1 sur 46,8, en ne tenant pas compte des mort-nés, tandis qu'on l'évaluait à 1 sur 40,5.

Une autre cause a pu contribuer à faire croire qu'en Belgique la mortalité est plus grande qu'elle ne l'est véritablement. Les administrations locales comprenaient, en général, dans les décès, les personnes étrangères à la commune qui y mouraient, ainsi que les personnes de la commune décédées au dehors, et dont les actes avaient été transcrits en vertu de l'article 80 du code civil. Ces doubles emplois ont dû exagérer les nombres des décès. Des mesures ont été prises pour qu'à partir de 1842, de pareilles erreurs ne se renouvellent plus. Tous les décès compteront dans les communes où ils ont eu lieu; les transcriptions seront mentionnées séparément.

Ainsi deux causes principales ont concouru à faire paraître, en Belgique, la mortalité plus grande qu'elle ne l'est réellement. Le chiffre des décès est probablement trop élevé et celui de la population trop faible. Il convient donc d'user de beaucoup de prudence, quand on veut comparer la mortalité de ce royaume à celle d'autres pays, où les chances d'erreurs pourraient être tout aussi grandes et porter dans un sens contraire. La France est sans doute le royaume pour lequel

* Mémoire sur les contingents des milices, tome Ier du *Bulletin de la Commission centrale de statistique de Belgique*.

ces comparaisons peuvent se faire avec le moins d'inconvénients; les décès s'y constatent avec la même rigueur et sous l'influence des mêmes dispositions pénales qu'en Belgique; il y a lieu de croire d'ailleurs que l'évaluation de la population y est également trop faible.

Il n'en est pas de même pour l'Angleterre. L'inscription des décès y est en quelque sorte facultative, et donne un nombre qui doit être bien au-dessous de la valeur réelle; de sorte que la mortalité y est représentée par un chiffre trop faible, en supposant exact l'élément de la population. Que dire alors des comparaisons que l'on veut établir, sous le rapport de la mortalité, avec d'autres contrées où la population est mal connue, et où les décès ne sont inscrits d'après aucune marche régulière?

Les statistiques devraient faire connaître soigneusement les moyens qui ont été employés pour recueillir les documents numériques, et les précautions qui ont été prises pour les rendre comparables. En l'absence de pareils renseignements, on voit à chaque instant les calculateurs arriver, pour les mêmes choses, aux résultats les plus divergents. Il serait temps de mettre un terme à un pareil état de choses.

Ces remarques m'ont presque fait perdre de vue la seconde démonstration que je dois à Votre Altesse. J'ai à lui faire comprendre comment, après avoir eu un avant-goût de l'immortalité, j'ai pu concevoir l'espérance qu'un jour la France sera sans crimes et sans criminels, et qu'il en sera de même de la Belgique. Voici la démonstration en deux mots : la

Belgique, avant 1830, n'acquittait que 16 individus sur 100 qu'on lui présentait sous le poids d'accusations de toutes espèces. Depuis cette époque, le nombre des accusés n'a pas augmenté; mais sur 100 accusés, au lieu de 16 innocents, le jury en trouve 32 ou même davantage; et, pour peu que cela continue, il ne condamnera peut-être plus personne; preuve évidente, dit mon ami le statisticien, que la Belgique ne connaîtra plus de criminels.

Je me permettrai de citer encore un dernier exemple, pour montrer avec quelle circonspection il faut procéder, afin d'arriver à rendre les résultats comparables entre eux, ce qui forme le principal but de la statistique. Des chiffres isolés n'ont en effet aucune valeur par eux-mêmes; ils n'acquièrent de prix qu'autant qu'on les rapproche d'autres chiffres, pour en déduire des conclusions; mais, dans ces espèces de syllogismes mathématiques, il est de la plus haute importance de bien vérifier les prémisses.

La partie de la statistique où l'on a, sans aucun doute, accumulé le plus d'erreurs, est celle qui a pour objet de constater la moralité d'un peuple. Aussi je ne crains pas de revenir encore sur le même sujet, dans l'espoir d'y jeter quelques nouvelles lumières.

Le mot crime est très-vague; ce qui est réputé crime ici, ne l'est peut-être pas de l'autre côté de la frontière. C'est une première difficulté quand, sous ce rapport, on veut comparer un pays à un autre.

En nous renfermant dans les limites de la Belgique, nous

pourrons éliminer cette première cause d'erreur; mais, en supposant que les crimes soient assez bien définis pour ne laisser lieu à aucun doute, on ne connaît jamais, je le répète, qu'une partie de ceux qui sont commis; et encore, ne fait-on figurer, dans les statistiques criminelles, que ceux qui ont été portés devant les tribunaux. Pour comparer, il faudrait donc non-seulement que deux pays fussent sous l'influence d'une même législation, mais encore que tous les crimes fussent constatés dans la même proportion.

Cette dernière difficulté est assez grande; cependant elle peut aussi être écartée, comme je l'ai fait voir dans ma dernière lettre, s'il est permis de croire que l'activité que met la justice à constater les crimes et à en poursuivre les auteurs, est la même dans les deux pays que l'on compare. J'ai tâché de montrer, en effet, qu'il s'établit alors des rapports constants entre ces trois choses: le nombre général des crimes commis, le nombre des crimes connus et le nombre des crimes poursuivis. En sorte que, sans connaître le nombre total des crimes commis, on peut cependant juger des *états relatifs* de la criminalité.

Il faut donc même législation, même répression et même activité de la justice pour découvrir les coupables. Or, ce dernier élément peut varier d'une province à l'autre; il doit varier bien plus encore, si, comme on le fait généralement, on compare le nombre des condamnés au lieu du nombre des accusés, puisqu'on fait intervenir dans la comparaison un nouvel élément, essentiellement variable selon les temps et

les localités. L'intervention du jury dans les affaires criminelles rend nécessairement absurdes les comparaisons établies entre les condamnations portées avant et après son introduction. On sait, en effet, que l'établissement du jury en Belgique a fait doubler le nombre des acquittements.

LETTRE XLIV.

De l'emploi de la statistique dans les sciences médicales.

Rien n'a été plus vivement contesté que l'utilité de la statistique dans les sciences médicales; et, de la manière dont on en use, il doit en être ainsi.

Quand éclate un de ces fléaux qui portent la destruction parmi les hommes, et qui semblent destinés à mettre en émoi les sociétés médicales, où ils laisseront les dernières traces de leurs ravages, parmi les médecins, les uns suivent docilement les leçons de leurs prédécesseurs, et les autres tentent aventureusement des voies nouvelles, soit dans un but d'utilité générale, soit encore dans un but d'utilité particulière et pour fixer sur eux l'attention publique. Tous, indistinctement, font de la statistique : mais les uns confient leurs résultats à leur mémoire; les autres, au papier; quelques-uns même font de la statistique à leur insçu, comme M. Jourdain faisait de la prose. Ceux qui ont obtenu le moins de succès se gardent bien de parler de leurs mésaventures; restent donc ceux qui ont réussi, ou qui croient avoir réussi mieux que leurs confrères.

Parmi eux, il s'en trouve un assez grand nombre qui ne doivent leurs réussites qu'à des causes accidentelles, et qui très-probablement auraient eu moins à se flatter, s'ils avaient été appelés à exercer leur art sur une plus grande échelle. Mais il en est aussi qui ne doivent leurs succès qu'à leur science et à leur sagacité. Or, c'est ici que nait ordinairement le doute.

Un médecin attribue la maladie à telle cause, et il a raison quant à ce qui concerne les malades qu'il a traités; un second médecin attribue la maladie à une autre cause, et il a pareillement raison; mais tous deux ont tort en ce qu'ils ne reconnaissent chacun qu'une seule cause, quand il en existait réellement plusieurs. Ils ne devaient point généraliser ce qui n'était que le résultat de cas particuliers; chacun n'a connu qu'une même face du dé qui s'est montrée plusieurs fois de suite, et il n'a pu reconnaître toutes les autres faces, faute d'un nombre suffisant d'épreuves. Leurs contradictions ne proviennent que de ce qu'ils avaient des notions incomplètes.

Ce sont ces contradictions qui frappent le vulgaire, et dès lors il proscrit les chiffres d'où l'on déduit des résultats qui s'excluent ou semblent s'exclure. Ajoutons, pour être vrai, que souvent le désir de se parer d'un succès, fait que la mémoire est moins fidèle pour enregistrer les cas malheureux, ou bien qu'on les écarte sous l'un ou l'autre prétexte, tout en croyant être sincère.

Mais laissons les jugements du vulgaire et revenons-en à notre exemple; les médecins voudront bien m'excuser, si je

leur rends un peu du scepticisme dont ils usent, d'ordinaire, assez largement envers les statisticiens. Si je suppose qu'ils traitent au hasard et sans faire ni bien ni mal, il arrivera, d'après la loi de possibilité, que le plus grand nombre perdront médiocrement de malades; quelques-uns en perdront beaucoup et garderont le silence; quelques autres en sauveront beaucoup, et ce sont généralement ceux-là qui élèveront la voix. En constatant les résultats de leur clientelle, et je les crois sincères, ils ne feront qu'établir un fait que j'accepte volontiers. Où donc est le mal? Je le trouve dans ce qu'on abandonne tout à coup la statistique, pour se jeter dans le domaine des conjectures.

On ne se borne pas à dire, j'ai sauvé beaucoup de malades; on ajoute : c'est parce que j'ai reconnu la cause de la maladie et que j'ai su y appliquer le véritable remède; mais on ne prouve aucunement le lien qui existe entre l'effet et la cause prétendue : or, c'est justement ce qu'il fallait faire.

On va même plus loin; et, après avoir assigné une prétendue cause à une maladie, on traite en conséquence les nouveaux malades qui se présentent, et la plupart du temps sans consulter leur constitution, leur âge, leur sexe. C'est ici que se trouve l'abus de la statistique, si toutefois statistique il y a.

Ce qui rend les progrès de la médecine si lents et si peu sûrs, c'est que les phénomènes qu'on observe, dépendent presque toujours d'une infinité de causes, et que, par suite, ils ne sont presque jamais parfaitement comparables entre

eux. Rien ne montre mieux les difficultés de cette science, que les retards qu'elle a éprouvés dans sa marche, malgré les travaux persévérants et le génie supérieur d'un grand nombre d'hommes qui s'en sont occupés, depuis la plus haute antiquité.

Si Votre Altesse veut bien me prêter quelque attention, je pourrai lui faire comprendre d'où naissent les difficultés réelles qui entravent les progrès de la médecine, et quels sont les secours que la statistique peut fournir pour aider à les surmonter.

Un médecin traite un malade et le guérit. Il est appelé ensuite près d'un second malade qui se trouve identiquement dans les mêmes circonstances que le premier, qui a la même constitution, le même âge, enfin qui lui est exactement comparable sous tous les rapports. Il lui fera naturellement l'application des moyens thérapeutiques qui lui ont déjà réussi, et il pourra regarder la guérison comme certaine, s'il est vrai que les mêmes causes produisent les mêmes effets.

Si l'identité existait rigoureusement chez tous les hommes, il suffirait donc d'une seule maladie bien observée et suivie de guérison, pour obtenir le même succès, toutes les fois que la même maladie se reproduirait sur d'autres individus. Mais cette identité parfaite n'existera peut-être jamais; on doit le croire au moins, quand on considère combien les individus peuvent être diversifiés par l'âge, par le sexe, par la constitution, par des maladies antérieures et par une

infinité d'autres causes. Un médecin, pendant tout le cours de sa vie, n'agira peut-être pas deux fois dans des circonstances absolument semblables.

Afin de ne pas trop m'écarter de ma première hypothèse, je suppose qu'il n'y ait, dans l'espèce humaine, de différence que celle qu'y met le sexe. Déjà le médecin sera moins sûr de son fait; et s'il a réussi à guérir d'abord un homme, peut-être va-t-il échouer quand il s'agira de traiter une femme. Il faudra recourir à l'expérience et constater si les moyens employés une première fois réussiront encore; il lui faut donc au moins deux observations.

S'il n'y avait pas seulement différence de sexe, s'il existait encore une inégalité d'âge, il faudrait augmenter le nombre des observations. Ainsi, en ne supposant, pour simplifier, que trois classes seulement, à savoir d'enfants, d'adolescents et de vieillards, se composant chacune d'individus ayant exactement le même âge; il n'existerait que six espèces d'individus, et il faudrait avoir au moins une observation pour chacun des six cas différents qui pourraient se présenter. Cependant, comme les âges peuvent varier par toutes les nuances, faudra-t-il autant d'observations qu'il y a d'âges possibles? Le nombre serait infini.

Que dire alors, s'il faut tenir compte non-seulement du sexe et de l'âge, mais encore de toutes les particularités individuelles? Je le répète, toute la carrière d'un médecin ne suffirait pas pour avoir l'occasion d'observer deux malades dans des circonstances absolument semblables.

Telle est, me semble-t-il, la plus forte objection que l'on puisse faire contre l'emploi de la statistique dans les sciences médicales. S'il s'agissait de prévoir tous les cas qui peuvent se présenter, et de réunir assez d'observations pour vérifier toutes les combinaisons possibles, il faudrait désespérer d'arriver jamais à quelque chose de satisfaisant, il faudrait renoncer non-seulement à l'emploi de la statistique, mais encore à l'observation même. L'expérience, en effet, ne serait qu'un vain mot, puisqu'une seule maladie pourrait subir un nombre infini de modifications, sous l'influence de toutes les causes qui la font naître.

Voyons cependant pourquoi les médecins, ceux même qui repoussent le plus vivement la statistique, n'ont pas entièrement désespéré de l'avenir de leur science. C'est qu'ils ont senti qu'il n'existe pas un grand nombre de cas essentiellement différents, bien que les causes qui peuvent influer sur une même maladie soient, en général, très-nombreuses et susceptibles de varier par une infinité de nuances. Dans bien des maladies, par exemple, la différence des sexes ne produit pas d'effet appréciable; il en est de même d'une inégalité peu marquée dans les âges; en sorte que ces causes peuvent être considérées comme exerçant à peu près le même degré d'influence. Il ne reste alors qu'à reconnaître les causes qui manifestent une action individuelle bien prononcée, et à faire, d'après une observation suivie, la part d'énergie qui leur appartient respectivement. Cet examen ne peut être fait que par des hommes d'un tact exquis et

d'un jugement sûr, par des observateurs doués de cette aptitude à la patience que Buffon nommait le génie. Or, croira-t-on que des hommes de cette prudence ne tiennent aucun compte de leurs observations, ou bien, s'ils en tiennent compte pour les comparer ensuite, qu'ils préfèrent les confier à leur mémoire plutôt qu'au papier? Mais, dès que ces observations sont recueillies pour être rendues comparables et en tirer des déductions, l'on fait de la statistique; on a beau s'en défendre. Il y a seulement cette différence entre ceux qui inscrivent les résultats de leurs observations et ceux qui les confient à leur mémoire, c'est que les premiers se conforment aux principes de la science, et que les autres y manquent d'une manière grossière.

Dans les sciences médicales, d'ailleurs, et dans l'hygiène publique en particulier, tous les faits ne sont pas également compliqués et, par suite, ne se présentent pas avec les mêmes difficultés à l'analyse statistique. Lorsque l'observateur les a reconnus, il est certain de pouvoir y appliquer avec succès la méthode fondée sur le calcul des probabilités.

Quand Jenner dota l'humanité de son importante découverte, on sentit d'abord que, pour reconnaître la valeur de la vaccine, il fallait enregistrer les faits et les comparer avec la plus scrupuleuse attention, en ayant égard à toutes les causes qui pouvaient s'opposer à son efficacité. Cette méthode purement statistique mit hors de doute le bienfait de la vaccine. C'est encore elle qui vint constater plus tard que

ce précieux préservatif n'avait, dans certaines circonstances, qu'une action temporaire.

Prenons un autre exemple, qui nous montrera combien on peut errer longtemps par la répugnance qu'on éprouve à compter, dans des questions qui sont exclusivement du domaine des nombres. Avant même qu'elle eût un nom, on avait fait intervenir la statistique dans les questions médicales. On avait déterminé la marche du pouls aux différents âges, reconnu la part qu'il faut faire à chaque sexe. Seulement des observations, ou mauvaises, ou trop peu nombreuses, avaient induit en erreur sur le nombre des battements chez les vieillards. La méprise fut répétée successivement dans tous les traités de physiologie, et bien que les médecins fussent, chaque jour, dans le cas de tâter le pouls des malades et de se diriger d'après ses indications, il ne leur vint pas à la pensée de vérifier le fait. Ce ne fut que dans ces derniers temps que l'on constata, par de nouvelles observations, que le pouls, contrairement à l'opinion reçue, est généralement plus accéléré chez le vieillard que chez l'homme dans la maturité de l'âge. Au lieu de repousser dédaigneusement le secours de la statistique, ne ferait-on pas mieux de s'en servir pour détruire bien des méprises qui subsistent dans les ouvrages consacrés aux sciences médicales? La plupart des nombres qu'on y rencontre exigeraient une sévère révision, et l'on serait peut-être étonné des erreurs qu'on aurait à y corriger.

Les données statistiques, n'en doutons pas, seraient de la plus grande utilité, si elles étaient toujours recueillies sans

passion et sans intention de faire prévaloir une idée préconçue. Quand le chirurgien préfère un genre d'opération à un autre, c'est qu'il y trouve plus de chances de succès. Or, pour être arrivé à cette conclusion, il a fallu compter et comparer : il a fallu recourir à la statistique. Les déplorables abus qu'on a faits de cette science, ont souvent laissé croire à l'impossibilité de s'en servir. Quand, chez un individu, on a constaté la présence de la pierre, il existe différentes méthodes pour en opérer l'extraction. Laquelle faut-il préférer? Il est évident que cette question ne peut être décidée qu'en réunissant des observations faites avec conscience et discernement. Si, toutes choses égales, la lithotritie sauve plus de malades que la taille, c'est la lithotritie qu'il faut employer. J'ai dit avec intention *toutes choses égales*, c'est-à-dire, les opérateurs ayant la même dextérité, tous les cas observés étant exactement comparables. Or, c'est ici que réside la difficulté; je laisse même de côté l'appréciation de la douleur qui peut résulter de l'emploi de l'une ou de l'autre méthode. Il faudra reconnaître les influences du sexe, de l'âge, de la complexion du malade, de la période de la maladie, etc. Pour tenir compte de ces influences, il faudrait un nombre considérable d'observations, faites avec précision et discutées avec intelligence. Or, cette discussion ne peut avoir lieu que par les méthodes de la statistique, qui sont celles de toutes les sciences d'observation; vouloir s'en affranchir, c'est se jeter dans un aveugle empirisme, et repousser les lumières de l'expérience.

Une discussion sage des faits apprend laquelle des deux opérations que l'on compare, a présenté le plus de succès; si ces succès ont été obtenus d'une manière générale, ou plus spécialement pour tel sexe seulement, pour tel âge, ou dans telle autre circonstance particulière. Tous les hommes raisonnables seront, je crois, d'accord sur ce point, qu'il faut s'éclairer par l'observation, recueillir des faits bien constatés, les rendre rigoureusement comparables avant de chercher à les discuter pour en déduire des rapports, et procéder avec méthode à l'appréciation des causes. Au lieu de cela, que voit-on? des observations incomplètes, non comparables, suspectes, qui sont entassées pêle-mêle, présentées sans discernement ou arrangées de manière à laisser croire au fait qu'on veut établir; et, presque toujours, on néglige de rechercher si le nombre des observations est suffisant pour inspirer de la confiance.

J'insiste surtout sur ce dernier point, parce que, dans l'art de guérir, il se trouve des questions influencées par tant de causes diverses, qu'il ne sera peut-être jamais possible d'en obtenir une solution satisfaisante. Je vais plus loin : même en supposant qu'on eût des solutions exactes pour les cas les plus compliqués, je dis qu'elles ne seraient d'aucun usage dans l'application, bien qu'elles pussent être très-utiles pour l'hygiène publique. Elles n'auraient qu'une valeur générale, et il serait absurde de les appliquer aux individus, parce qu'on ne saurait tenir compte de toutes les particularités qui les concernent. Autant vaudrait chercher

dans une table de mortalité à quel âge un individu désigné doit mourir. Cependant personne ne révoque en doute l'utilité des tables de mortalité dans les recherches médicales et dans les spéculations sur la durée de la vie. La statistique, ou plutôt les méthodes d'observation fondées sur le calcul auraient déjà rendu un véritable service, si elles avaient examiné les cas les plus simples, ceux où peu de causes influentes exercent leur action.

La statistique a-t-elle donc rendu de si médiocres services, en nous faisant connaître l'influence exercée sur les décès, par les âges, les sexes, les professions, les circonstances atmosphériques; en étudiant ce qui se rapporte aux naissances, au nombre des accouchements et des mort-nés, aux vaccines, etc.? Parmi les faits qu'elle a constatés, il en est plusieurs d'une haute importance qu'elle a soumis à l'examen des gens de l'art, et qui sont restés sans explication. Je citerai en particulier la mortalité plus grande des enfants mâles vers l'époque de la naissance; d'où provient-elle? A-t-on cherché aussi à se rendre compte des particularités qui concernent les mort-nés, et à combattre les causes qui, dans certaines circonstances, en élèvent le nombre d'une manière si déplorable?

Les questions statistiques relatives à la chirurgie sont, en général, d'un abord plus facile que celles qui concernent la médecine : d'une part, on voit presque toujours la maladie; et, de l'autre, il faut presque toujours la deviner. Le médecin doit établir une espèce d'enquête, et mettre à l'in-

terrogatoire qu'il fait subir au malade, les mêmes précautions que le juge emploie à l'égard du coupable auquel il veut arracher son secret.

Il existe deux genres de difficultés : à côté de la question de thérapeutique se place celle du diagnostic. La guérison du malade dépend d'un événement composé, savoir : 1° le médecin reconnaîtra la maladie; 2° il saura le mode de traitement qu'il convient de suivre. Or, on s'est généralement préoccupé de la seconde question bien plus que de la première, et je pense que c'est à tort. Je me permettrai de citer à ce sujet des réflexions très-justes; je les extrais d'un opuscule que je viens de recevoir d'un ami, qui sait embrasser, d'un coup d'œil philosophique, plusieurs sciences d'observation qu'il cultive avec un égal succès. « Les questions thérapeutiques, dit-il, ne sont point celles par lesquelles on doit commencer. Je voudrais que le calcul fût appliqué d'abord à des questions de diagnostic ou de symptomatologie. Tels symptômes étant donnés, quelle est la probabilité que le malade est affecté d'une maladie plutôt que d'une autre, la probabilité de sa durée, de son retour, de son passage à l'état chronique lorsqu'elle est abandonnée aux seules forces de la nature? Ces diverses questions et beaucoup d'autres, une fois résolues, alors je passerais à l'étude de l'influence d'une médication. »

Dans cette dernière étude, pour juger avec connaissance de cause des avantages que peut présenter la thérapeutique, il faudrait commencer par rechercher ce que deviendrait

l'homme affecté de telle maladie et abandonné aux seules forces de la nature. Peut-être serait-on conduit à conclure que, dans les cas douteux et difficiles, il vaut mieux livrer le malade aux forces de la nature qu'aux remèdes de l'art, en se bornant à exercer un régime de surveillance? Les différents genres de traitement ont moins d'influence sur la mortalité qu'on ne le pense généralement. Voici comment s'exprime à ce sujet un savant estimé, le docteur Hawkins: « Un ami prit des notes particulières sur la mortalité comparative sous trois médecins, dans un même hôpital. L'un était *éclectique*, le second était pour le système *expectant* et le troisième pour le régime *tonique*. La mortalité était la même, mais la durée de l'indisposition, le caractère de la convalescence et les chances de rechute étaient bien différents. » Ainsi, la mortalité était la même. Nous pouvons tirer de semblables conclusions des documents recueillis dans les principaux hôpitaux de l'Europe; la mortalité y varie dans des limites assez étroites et dépend bien plus de la tenue des hôpitaux que des moyens thérapeutiques qui y sont employés. D'où semblerait résulter que la science administrative aurait au moins autant d'influence que la science médicale, et l'on conçoit qu'il doit en être ainsi. A quoi sert d'appeler les médecins les plus instruits, si l'on néglige de suivre leurs prescriptions, et, si pendant leur absence, des soins mal entendus ou des imprudences détruisent tout le bien qu'ils auraient pu opérer?

Si je ne craignais d'être taxé d'exagération, je dirais

qu'une bonne administration sauve peut-être plus de malades dans les hôpitaux, que la science des médecins les plus habiles. Pour juger de son influence sur la santé des hommes réunis dans de vastes établissements, qu'on examine ce qui se passe dans les prisons; on y verra la mortalité varier dans les limites les plus larges. Sans sortir même de la Belgique, je trouve que, dans la maison de force de Gand, les décès sont proportionnellement moins nombreux que dans les classes privilégiées de la société, tandis que, dans la prison de Vilvorde, il a régné pendant les années 1802, 1803 et 1804 une mortalité telle que jamais les hommes, pendant les pestes les plus affreuses, jamais les soldats, pendant les guerres les plus destructives, n'ont été décimés d'une manière plus épouvantable. Sur quatre prisonniers, il en mourait annuellement trois! Ce fléau, produit d'une administration vicieuse, commença à sévir avec moins d'intensité en 1805, grâce à d'utiles réformes, et, deux ans après, tout était à peu près rentré dans l'état normal.

Il me serait impossible de présenter à Votre Altesse un exemple plus instructif et qui méritât plus de fixer son attention. Une science qui a pour mission de révéler des faits pareils, ne saurait être sans importance aux yeux d'un prince éclairé.

LETTRE XLV.

De l'utilité de la statistique pour l'administration.

Les documents statistiques offrent un double intérêt; ils sont utiles à la fois aux sciences et à l'administration. Ce n'est qu'en consultant le passé que l'homme d'état peut se faire des idées justes sur l'avenir, reconnaître si un pays possède les éléments nécessaires pour réaliser avec succès des plans projetés, apprécier quelles sont les lois qui exigent des réformes, et porter des lumières dans une foule de questions importantes.

De la grande extension qu'ont prise les chemins de fer en Europe, naissent plusieurs problèmes politiques dont nous sommes loin de posséder les éléments de solution. Il serait difficile de prévoir dès à présent les variations qui auront lieu dans les populations des villes, dans les prix des terres, dans les principaux siéges des différentes industries et en général dans toutes les transactions sociales. On aura peut-être peine à croire, un jour, qu'une simple accélération dans le transport des voyageurs et des marchandises ait pu avoir de pareilles conséquences. La vie humaine s'est allon-

gée; le globe même semble avoir changé ses dimensions, les villes se sont rapprochées; déjà toute notre Belgique se trouve resserrée en quelque sorte dans la banlieue de sa capitale. La civilisation étend son niveau d'une extrémité de l'Europe à l'autre; ce qu'il y a de caractérisque et de pittoresque s'efface dans chaque peuple, tandis que les locomotives font chaque jour de nouvelles brèches dans les barrières des douanes, jusqu'à ce qu'elles les aient entièrement détruites.

La statistique doit s'empresser d'enregistrer dès à présent tous les faits qui pourront servir à l'étude de cette vaste transformation qui tend à s'accomplir dans le corps social. Personne n'en pourrait prévoir complétement les conséquences, et chacun cependant cherche à les apprécier.

Mais, sans considérer les choses sous un point de vue aussi général, combien il est de questions statistiques d'un intérêt actuel qui se rattachent à l'établissement des chemins de fer! Les questions relatives aux recettes et aux dépenses, à la durée des matériaux, aux prix des places, au tarif des marchandises, etc., sont si multipliées et si importantes, qu'un gouvernement éclairé aurait intérêt, pour en obtenir les solutions, à les soumettre à quelques hommes instruits qui en feraient exclusivement leur étude.

Pour n'en citer qu'un exemple: il existe une dépendance entre le nombre des voyageurs qu'on transporte chaque jour, et les prix qu'on leur fait payer; cette dépendance est telle que les recettes augmentent ou diminuent selon les

prix des places. Chacun conçoit en effet que si les prix étaient trop bas, le nombre des voyageurs, quoique plus considérable, ne suffirait pas pour payer les frais de l'entreprise; si au contraire ils étaient trop élevés, le nombre des voyageurs diminuerait, et l'administration, encore une fois, courrait risque d'être en perte. Il y a donc un *maximum* que l'on peut atteindre et qu'on ne déterminera qu'à l'aide de bons documents statistiques.

Toutefois, la question est plus compliquée qu'on ne pourrait le croire, car le gouvernement ne perçoit pas seulement un droit payé dans les bureaux des chemins de fer; il prélève encore une espèce de contribution indirecte sur les dépenses et sur toutes les transactions occasionnées par les voyages. Cette activité générale, cet accroissement de vitalité que reçoit tout un pays, donnent un nouvel essor au commerce et à l'industrie, qui sont, avec l'agriculture, les premiers soutiens d'un état.

Une épreuve qui se rattache à ce genre de questions, a été faite récemment en Angleterre. Le gouvernement a subitement réduit, d'une valeur considérable, la taxe des lettres. Qu'en est-il résulté? Le déficit dans les recettes des postes a d'abord été très-considérable; mais, le nombre des lettres ayant ensuite progressivement augmenté, il s'est trouvé en définitive que les revenus ont atteint à peu près leur taux habituel; la différence qui subsiste encore, est sans doute plus que compensée par les avantages indirects que le gouvernement et les particuliers en ont retirés. Les résultats de

cette mesure administrative si habilement combinée, ont pu être constatés immédiatement par des documents statistiques recueillis avec soin.

Il ne suffit pas, du reste, d'avoir apprécié les avantages matériels d'une innovation. Les avantages moraux sont quelquefois d'une importance plus grande; c'est ce que l'on perd trop souvent de vue. La Belgique a trouvé dans l'établissement de ses chemins de fer, une puissance morale bien supérieure aux bénéfices pécuniaires qui pourront résulter de sa vaste entreprise. Le gouvernement, qui sortait d'une crise révolutionnaire, a pu donner une direction nouvelle aux esprits, les ramener à des habitudes d'ordre et de travail; et l'étranger, qui nous avait mal jugés d'abord, et qui nous croyait livrés à l'anarchie, eut foi dans notre avenir; il ne put refuser sa confiance ni son estime à un peuple qui, le lendemain d'une révolution, entreprenait courageusement des travaux gigantesques devant lesquels reculaient la plupart des états fondés sur les bases les plus solides.

Un gouvernement en modifiant ses lois, surtout ses lois financières, doit recueillir avec soin les documents propres à constater, plus tard, si les résultats obtenus répondent à ses prévisions. On fait et l'on défait des lois, avec une précipitation telle que la plupart du temps il est impossible d'en étudier l'influence; les lois sur les droits d'entrée et de sortie en présentent de tristes exemples. Il en est ici, comme de la taxe des lettres en Angleterre; il est des prix qu'il faut savoir atteindre; ce sont ceux qui concilient le mieux tous les intérêts.

Quand des taxes sont trop élevées, on a recours à la fraude; ou bien les entrées diminuent. Il existe, au contraire, de nombreux exemples qui prouvent qu'en abaissant les prix des octrois ou des douanes, les revenus du trésor ont été sensiblement augmentés.

La plupart des nations civilisées ont encore des idées très-inexactes sur les choses qu'il leur importe le plus de connaître. Je citerai en particulier la valeur des récoltes et celle des principales consommations. Cependant il est indispensable de savoir, quand on établit des lois, si un pays peut se suffire à lui-même, et de connaître, à la veille d'une crise, jusqu'à quel point il faut se pourvoir à l'étranger.

Une sage administration doit faire entrer aussi, dans sa statistique, les renseignements dont elle peut avoir subitement besoin dans des circonstances extraordinaires, telles qu'une déclaration de guerre. Il importe de connaître d'où l'on peut recevoir, en temps utile, des approvisionnements pour les hommes et les chevaux; où l'on trouvera des logements; où l'on prendra les chariots et les chevaux nécessaires pour les transports.

Je ne crois plus devoir insister auprès de Votre Altesse, sur l'importance d'un bon recensement et d'un état civil bien tenu; j'en ai suffisamment parlé dans mes lettres précédentes. Toutes les questions qui se rattachent à la population méritent, en général, la plus grande attention de la part d'un gouvernement. Il en est une qui, de jour en jour, offre plus d'intérêt et qu'on semble laisser encore dans l'ombre, bien

qu'elle ait excité déjà de vives inquiétudes dans quelques états. Je me permettrai, par cela même, de la soumettre à Votre Altesse; il s'agit de la légitimité des naissances.

C'est un principe bien connu que, sous l'influence des mêmes causes, les effets restent les mêmes. Si les naissances illégitimes, par exemple, augmentent progressivement, il faut bien en rechercher la cause quelque part. Dans plusieurs grandes villes, telles que Paris et Bruxelles, le tiers des naissances sont illégitimes; à Munich, le rapport est plus grand encore, et l'on compte autant de naissances illégitimes que de naissances légitimes. Quelle peut en être la cause? Faut-il l'attribuer à une mesure législative prise dans le dessein d'obvier à d'autres maux, et dire que la défense de contracter mariage, à moins de pouvoir garantir un état et un avenir à sa femme, pousse au concubinage? Une parfaite connaissance des choses peut seule aider à résoudre cette importante question.

La statistique criminelle, bien que naissante, a déjà introduit des réformes utiles dans les lois. Elle a montré, par exemple, que lorsque la disproportion est trop grande entre le crime et la peine, celle-ci ne reçoit plus son application, et par suite reste inutile. C'est ainsi que la peine de mort attachée à l'infanticide, se trouve rarement appliquée; pour donner à la loi son plein effet, il faudrait en adoucir la rigueur.

Quand une loi pénale est modifiée, son influence doit se faire ressentir; si cette influence ne laisse aucune trace et que les résultats des années antérieures continuent à se re-

produire, c'est que la modification est sans effet, et par suite illusoire. Quand, au contraire, les effets produits sont marqués, ils apprennent si la modification a été avantageuse ou nuisible.

La France a donné le premier exemple d'une statistique des crimes faite avec soin et sur une échelle fort étendue. Dès les premières publications, on pouvait y lire ce résultat, si frappant que je n'ai pas balancé à le proclamer, bien que j'aie rencontré nombre d'incrédules. *Il est un budget qu'on paie avec une régularité effrayante, c'est celui des prisons, des bagnes et des échafauds;* et j'ajoutais, *c'est celui-là surtout qu'il faudrait s'attacher à réduire.*

Quelques personnes ne virent d'abord, dans l'expression du fait révélé par la statistique criminelle, qu'une tendance au matérialisme; et, dans leur préoccupation, elles ne songèrent pas même au sens que je pouvais attacher aux derniers mots.

Mais c'est précisément dans la fixité du retour des mêmes effets, sous l'influence des mêmes causes, que le législateur trouve l'idée la plus consolante, et la preuve qu'en changeant avantageusement une loi, il produira nécessairement un effet utile sur l'avenir de la nation. Dans quel but ferait-il des réformes, s'il n'était certain qu'elles produiront des fruits et que ces fruits seront durables? On ne peut certainement pas se flatter de faire disparaître tous les crimes qui souillent la société; mais on conçoit qu'il existe un ensemble de lois, une administration éclairée et un état social

tels que le nombre en soit aussi réduit que possible. Ce dernier chiffre dépend de l'organisation intime de l'homme, et l'excédant est en quelque sorte le produit de l'organisation sociale.

Votre Altesse me permettra de citer un autre exemple de l'utilité des statistiques criminelles. Je l'ai déjà fait connaître ailleurs; je ne crains pas de le répéter, parce qu'il me semble aussi curieux que concluant, et que, dans cette circonstance, il m'est arrivé encore de prédire l'avenir, sans que mes prophéties aient été démenties par l'expérience, chose assez rare pour qu'il me soit permis d'en tirer quelque vanité.

Quand, en 1826 et 1827, parurent les premières statistiques des tribunaux de la France et de la Belgique, mon attention se porta sur la répression, c'est-à-dire sur le rapport du nombre des condamnés à celui des accusés; et voici ce que j'imprimai dans la statistique belge, dont je fus chargé de publier les premiers résultats *. « En 1826, nos tribunaux criminels ont condamné 84 individus par 100 accusés; et les tribunaux français, 65; les tribunaux anglais en ont condamné 65 également, pendant les 20 années qui viennent de s'écouler. Ainsi, *sur 100 accusés, 16 seulement ont été acquittés chez nous*, et 35, *en France comme en Angleterre.* Ces deux derniers pays, si différents par les mœurs et les lois, prononcent cependant de la même manière sur le sort des malheureux qu'on soumet à

* *Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas*, 1 vol. in-8°, 1829; chez Tarlier; et *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, tom. V, 1828.

leurs jugements ; tandis que notre royaume, si semblable à la France par ses institutions, acquitte une fois moins d'accusés. Doit-on chercher la cause de cette différence dans ce que nous n'avons pas l'institution du jury qui existe chez nos voisins ? nous le croyons.

» Examinons en effet, ce qui se passe devant les tribunaux correctionnels, où des juges seuls prononcent, comme dans nos tribunaux ; nous trouverons en France la même sévérité que chez nous : sur 100 accusés, 16 seulement sont acquittés ; examinons les tribunaux de simple police, même sévérité : sur 100 accusés, 14 seulement sont acquittés. Ce qui précède nous porterait donc à conclure que, *quand* 100 *accusés paraissent devant les tribunaux, soit criminels, soit correctionnels, soit de simple police*, 16 *seront acquittés s'ils ont affaire à des juges, et* 35 *s'ils ont affaire à un jury.* »

Telles étaient les conclusions que je déduisais des premiers documents statistiques sur les crimes, qui furent publiés en France et chez nous. J'ignorais alors que l'année suivante dût réaliser mes conjectures de la manière la plus éclatante. La révolution de 1830 détacha la Belgique du royaume des Pays-Bas et lui donna l'institution du jury. Aussitôt les acquittements prirent la même marche qu'en France.

Les chances d'acquittement pour un accusé furent donc doublées en Belgique par le seul fait de l'institution du jury ; et, sur 100 accusés, 16 qui auraient été condamnés sous le régime antérieur à 1830, ont été rendus à la société.

Est-ce un bien? est-ce un mal? Je me borne à livrer ce fait remarquable aux méditations du législateur.

Il est bien vrai qu'on pourrait demander si la mise en accusation s'est toujours faite avec la même régularité. Car de ce jugement préalable doit dépendre en grande partie la valeur de la répression.

Les statistiques, je le répète, offrent un des moyens les plus sûrs d'apprécier l'efficacité des lois. A une certaine époque, les condamnations pour falsification de billets de banque étaient très-nombreuses en Angleterre, et cependant elles entraînaient la peine capitale. Au lieu de continuer à sévir contre les coupables, on s'avisa, un jour, d'introduire des réformes dans la fabrication de ces billets, et immédiatement après, on trouva que le nombre des condamnations était considérablement réduit.

Une pareille mesure prise quelques années plus tôt, eût peut-être sauvé la vie et l'honneur à bien des malheureux.

Faut-il d'autres preuves pour montrer la sage circonspection qui doit dominer le législateur, et les utiles leçons qu'il peut puiser dans les documents statistiques?

LETTRE XLVI.

Des progrès ultérieurs de la statistique.

La statistique, jusque dans ces derniers temps, a été accueillie avec une grande faveur. Plusieurs savants ont montré les ressources qu'on en pouvait tirer, et ils ont présenté des solutions de questions aussi neuves qu'instructives. Mais comme l'imagination et le zèle peu éclairé de divers écrivains, ont dépassé les limites que devaient leur imposer les observations trop peu nombreuses encore, et surtout trop peu exactes, que nous possédons, la défiance a succédé au premier entraînement.

Si quelque chose doit étonner cependant, c'est qu'avec le peu de ressources que possédait la science, elle ait pu établir déjà un aussi grand nombre de faits intéressants pour la société. L'on est tombé, il est vrai, dans de fréquentes méprises; mais elles ont été successivement reconnues et signalées; et peut-être ces erreurs mêmes ont-elles eu leur côté utile.

Dans quelques pays on a accumulé les chiffres par un désir immodéré de contribuer aux progrès de la statistique et de jeter des lumières sur les différents rouages de l'état.

Cette profusion de tableaux numériques, la plupart du temps inexacts, n'a fait qu'encombrer le terrain de la science de matériaux incommodes et souvent nuisibles.

Il importe, avant tout, comme je n'ai cessé de le répéter, que les documents statistiques que l'on publie, soient exacts, comparables et qu'ils présentent toutes les garanties nécessaires. Or, dans l'état actuel des choses, les comparaisons ne peuvent s'établir, même dans les limites d'un seul royaume. Chaque administration publie ses documents, sans se mettre en harmonie avec les administrations voisines. Souvent on trouve des chiffres différents pour exprimer les mêmes choses, et presque toujours des classifications dissemblables, quand il faudrait la plus rigoureuse uniformité: c'est ce qu'on remarque surtout dans les classifications par âges, dans le partage de la population par professions diverses, dans la nomenclature des maladies, et dans celle des crimes dont la connaissance est portée devant les tribunaux. En France, tandis que le ministère du commerce évalue les céréales en hectolitres, l'administration des douanes compte par quintaux métriques et par kilogrammes.

Ces disparates sont autant d'obstacles aux progrès de la statistique: elles ont frappé tous ceux qui s'occupent de cette science d'une manière pratique. Le célèbre Malthus m'exprimait, un jour, le regret de ce qu'il n'existât aucun pays en Europe, où la statistique fût organisée de manière à répondre à toutes les exigences de la science. Les sacrifices qu'on ferait pour obtenir un but si désirable, seraient certai-

nement bien compensés par les travaux qu'ils provoqueraient de la part des hommes les plus éclairés : les moyens de l'améliorer, s'il existait un pays semblable, deviendraient l'objet de leurs méditations constantes. La Belgique paraissait aux yeux du célèbre économiste anglais, réunir à cet effet les conditions les plus favorables; placée entre trois des principales nations de l'Europe, la France, l'Angleterre et l'Allemagne, constamment traversée par les voyageurs des différents pays, elle offre à chacun d'eux des moyens aisés de prendre, par eux-mêmes, connaissance des lieux et de contrôler les documents statistiques. Son peu d'étendue rend ces vérifications faciles; on y a d'ailleurs des garanties d'exactitude dans un état civil bien tenu, dans une administration établie sur de bons principes; on y trouve à la fois des parties agricoles et des parties purement industrielles, des terrains montagneux et des plaines. La composition du royaume se prête à tous les genres d'étude.

Malthus voulut bien, à ma prière, rédiger une note que je pris soin de remettre moi-même au gouvernement belge; mais cet écrit fut probablement perdu de vue, et subit le sort de tant de projets qui dorment dans les cartons ministériels, en attendant le jour qui leur donnera une nouvelle vie. Cependant un homme d'état éclairé, M. Liedts, a réalisé depuis, du moins en partie, les idées de Malthus, en créant, chez nous, la commission centrale de statistique, qui s'est ramifiée et qui couvre toute la Belgique d'un vaste réseau, propre à favoriser les enquêtes que le gouvernement

jugerait à propos d'établir. Il est à désirer que cette unité s'étende plus loin.

Quand il s'agit de deux pays différents, il semble qu'on ait pris plaisir à rendre toute espèce de rapprochement impossible. Il faudra bien du temps encore pour mettre de l'ordre dans un pareil chaos.

Quelques gouvernements ont senti cependant les inconvénients de cet état de choses, et ont cherché à le faire cesser. La Belgique et la Sardaigne sont entrées les premières dans cette voie; les autres états civilisés finiront sans doute par suivre leur exemple. On doit à la France et à l'Angleterre des statistiques spéciales d'un grand intérêt : n'est-il pas à regretter que ces deux foyers de civilisation n'aient pas encore adopté les mesures nécessaires pour procéder avec unité dans la rédaction de tous les documents qu'ils publient, et pour éviter les doubles emplois qu'on y rencontre si fréquemment.

Quand une marche uniforme aura été adoptée dans chaque état, il restera encore un dernier pas à faire, ce sera de mettre de l'uniformité dans les différentes publications, autant du moins qu'on pourra y réussir, en conciliant les intérêts généraux de la science avec les intérêts particuliers de chaque pays.

Cette uniformité désirée tend, chaque jour, à s'établir par la force même des choses. Car, lorsqu'une classification dans les documents statistiques d'un pays a été jugée bonne, on cherche naturellement ailleurs à s'en éloigner le moins

possible. Mais le but désiré serait atteint, d'une manière plus sûre et plus rapide, par l'établissement de grands centres d'action, qui se mettraient en relation directe.

C'est dans une organisation pareille que repose l'avenir de la statistique. Ce qui manque essentiellement, ce sont de bonnes observations qui soient comparables entre elles. Je crois avoir suffisamment montré que les méthodes scientifiques pour les mettre en œuvre ne feraient point défaut. L'homme isolé voit son action renfermée dans un cercle trop étroit, pour qu'il puisse songer à réunir tous les matériaux qui doivent composer l'édifice; il faut, pour réussir, avoir nécessairement recours à la généreuse intervention des gouvernements.

Je suis heureux de pouvoir plaider ici la cause d'une science qui m'est chère, et qui aurait besoin d'appui pour réaliser tout ce qu'on est en droit d'en attendre. Je ne saurais le faire sous de meilleurs auspices, car les princes de la maison de Votre Altesse ont toujours été les protecteurs des sciences et les amis des lumières; et j'ai été dans l'heureuse position de pouvoir juger par moi-même que ces qualités héréditaires n'y ont point dégénéré.

FIN.

NOTES.

—

Lettre III, page 18.

« Pour estimer la probabilité du retour d'un événement qui déjà s'est reproduit périodiquement plusieurs fois de suite, il faut *diviser le nombre de fois que l'événement a été observé, augmenté de l'unité, par le même nombre augmenté de deux unités.* »

Cela revient à dire que, si nous représentons le nombre de fois que l'événement est arrivé, par un même nombre de boules blanches que nous jetons dans une urne, en y ajoutant encore une boule blanche et une boule noire; la probabilité de la reproduction de l'événement sera égale à celle du tirage d'une boule blanche.

Chaque reproduction de l'événement observé équivaut, par conséquent, à la mise d'une nouvelle boule blanche dans une urne, où se trouvaient déjà, avant le commencement des épreuves, une boule blanche et une boule noire.

Page 21.

« Pour calculer la probabilité qu'un événement, observé un nombre quelconque de fois de suite, se reproduira encore plusieurs fois, on doit suivre cette règle : *La probabilité vaut une fraction qui a, pour numérateur, le nombre des observations faites plus* 1; *et, pour dénominateur, le même nombre plus* 1, *et plus encore le nombre de fois que l'événement doit se reproduire.* »

En usant de la comparaison faite précédemment, nous dirons que les choses se passent comme si chaque reproduction de l'événement observé répondait à la mise d'une boule blanche dans une urne, où se trouvaient déjà, avant le commencement des épreuves, une boule blanche et autant de boules noires que l'événement observé est supposé devoir encore se reproduire de fois.

Quand un événement a été observé m fois de suite, par exemple, on a, pour la probabilité que cet événement se reproduira encore n fois,

$$P = \frac{m + 1}{m + n + 1}.$$

La probabilité est la même, comme nous l'avons vu, que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contiendrait autant de boules blanches que l'événement a été observé de fois plus une, et autant de boules noires que l'événement attendu doit se reproduire de fois.

Si, dans la formule précédente, on regarde les quantités P, m et n comme trois variables, on aura l'équation d'une surface du second degré. Cette surface est du genre de celles qu'on nomme surfaces réglées; car on peut y appliquer une ligne droite dans toute son étendue, parallèlement au plan des coordonnées m et n. En faisant, en effet, P constant, il ne reste plus que l'équation d'une ligne droite, qu'on peut écrire de la manière suivante

$$m = \frac{Pn}{1 - P} - 1,$$

d'où

$$\frac{m + 1}{n} = \text{constante}.$$

Pour que la probabilité que l'événement, arrivé m fois, se reproduise encore n fois, reste toujours la même, il faut donc qu'on ait cette relation très-simple.

—

Lettre IV, page 25.

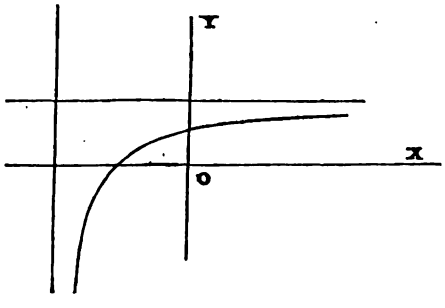
« En général, la probabilité qu'il existe une cause qui nécessite la reproduction d'un événement observé plusieurs fois de suite, croît beaucoup plus rapidement que la probabilité du prochain retour de cet événement. »

Nous essaierons de démontrer mathématiquement cette proposition.

Quand un événement a été observé x fois de suite, on a, pour la probabilité de la reproduction de cet événement,

$$y = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Cette équation appartient à une hyperbole dont voici la forme :



Pour $x = \infty$, on a $y = 1$; c'est-à-dire qu'après un nombre infini d'observations, la probabilité se change en certitude. Pour $x = o$, c'est-à-dire avant d'avoir commencé les épreuves, la probabilité est $\frac{1}{2}$; ce qui caractérise l'état de doute sur ce qui va arriver.

Pour la probabilité que l'événement n'a pas été produit au hasard, mais qu'il a été facilité par des causes, on a

$$y = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x+1}}.$$

C'est l'équation d'une logarithmique. Pour $x = \infty$, on a $y = 1$; ainsi, après la reproduction indéfinie de l'événement, il y a certitude que cet événement dépend de certaines causes. Pour $x = o$, on a $y = \frac{1}{2}$, ce qui caractérise également le doute où l'on se trouve, avant les épreuves, sur l'existence ou la non-existence d'une cause favorable à la reproduction de l'événement.

Les deux probabilités convergent donc vers la certitude, à mesure que l'événement se répète plus de fois, mais d'une manière inégalement rapide. La dernière probabilité croît le plus rapidement.

En effet, pour une même valeur de y, on a

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{2^{x'+1}-1}{2^{x'+1}}, \quad \text{d'où} \quad 2^{x'+1} = x+2;$$

ou bien

$$x = 2^{x'+1} - 2 = 2(2^{x'} - 1).$$

Cette équation entre les deux variables x et x', est encore celle d'une logarithmique.

Les probabilités sont donc égales :

Pour l'existence d'une cause :			Pour la valeur de l'événement :		
Après	1	événement.	Après	2	événements.
Id.	2	id.	Id.	6	id.
Id.	3	id.	Id.	14	id.
Id.	4	id.	Id.	30	id.
Id.	5	id.	Id.	62	id.

On peut voir dans l'ouvrage de M. Cournot, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, 1843, p. 155, les observations qui ont été faites par ce savant contre la formule

$$\frac{2^{x+1}-1}{2^{x+1}},$$

que l'on a nommée la règle de Bayes.

LETTRE VII, page 40.

« C'est auprès d'une table de jeu qu'elle a reçu le jour. »

Voici ce qu'on lit dans le discours sur la vie et les ouvrages de Pascal, par Bossut, auteur de l'*Essai sur l'histoire générale des mathéma-*

tiques. « Les mêmes principes donnèrent naissance à une nouvelle branche de l'analyse, qui a été très-féconde dans la suite, et c'est encore à Pascal qu'on en doit les éléments. Cette branche est le calcul des probabilités dans la théorie des jeux de hasard. Le chevalier de Méré, grand joueur, nullement géomètre, avait proposé sur ce sujet deux problèmes à Pascal. L'un consistait à trouver en combien de coups on peut espérer d'amener sonnez avec deux dés; l'autre, à déterminer le sort de deux joueurs après un certain nombre de coups, c'est-à-dire, à fixer la proportion suivant laquelle ils doivent partager l'enjeu, supposé qu'ils consentent à se séparer, sans achever la partie. Pascal eut bientôt résolu ces deux questions. Il n'a pas donné l'analyse de la première; on voit seulement par l'une de ses lettres à Fermat, que, suivant le résultat de son calcul, il y aurait du désavantage à entreprendre d'amener, en vingt-quatre coups, sonnez avec deux dés; ce qui est vrai, en effet, comme il est également vrai qu'il y aurait de l'avantage à tenter la même chose en vingt-cinq coups. Mais il nous a laissé relativement à la seconde question, un écrit pour déterminer en général les *partis* qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties; et il a encore traité la même matière dans ses lettres à Fermat. Le chevalier de Méré, qui avait résolu, avec le secours de la logique naturelle, quelques cas particuliers et faciles de ces problèmes, incapable d'apprécier les recherches de Pascal, mais enorgueilli d'y avoir donné occasion, se crut en droit de les rabaisser; et poussant à l'excès la risible liberté que la plupart des gens du monde s'arrogent de tout juger, de tout improuver, sans avoir rien approfondi, il osa écrire à Pascal que *les démonstrations de la géométrie sont le plus souvent fausses; qu'elles empêchent d'entrer dans des connaissances plus hautes qui ne trompent jamais;* qu'elles font perdre dans le monde l'avantage *de remarquer à la mine et à l'air des personnes qu'on voit, quantité de choses qui peuvent beaucoup servir, etc.* Si cette lettre ridicule a quelque sens, on entrevoit que l'auteur regarde l'art de saisir les faiblesses des hommes et d'en profiter, comme la suprême science; opinion d'une âme vile et dépravée que personne n'oserait énoncer ouvertement;..... on sent que le jugement du chevalier de Méré sur les découvertes de Pascal ne pouvait exciter que la pitié et non pas l'indignation. Fermat, Roberval et les autres grands géomètres du temps, applaudirent à ces mêmes découvertes, et leur suffrage eût consolé l'auteur, s'il avait eu besoin de l'être. »

Lettre VII, page 43.

« Il faut, dans toute espèce de jeu ou de pari équitable, que les espérances mathématiques des joueurs soient égales. »

Soient p et p' les probabilités de gagner des deux joueurs; s et s' les sommes qu'ils exposent respectivement; on doit avoir, pour que la partie soit équitable, la proportion

$$p : p' = s : s'.$$

Et on en déduit $p.\ s' = p'.\ s$. La quantité $p.\ s'$ est l'espérance mathématique du premier joueur, et $p'.\ s$ est l'espérance mathématique du second joueur. Ces quantités sont donc toujours égales si les mises ont été proportionnelles aux probabilités de gagner qu'avaient les joueurs.

Quand on joue à la loterie, cette égalité n'existe pas. En nommant s la somme exposée par le joueur, et s' la somme qu'il espère gagner, on trouve que s' est toujours moindre que la valeur exigée pour l'égalité, et d'autant moindre que le rapport de s' à s est plus fort. Le tableau suivant l'indiquera suffisamment; il est construit d'après les bases qui règlent la loterie de France.

NATURE DU JEU.	POUR 1 FRANC EXPOSÉ, somme que le joueur		PERTE sur ce qu'il devrait recevoir.
	devrait RECEVOIR.	REÇOIT.	
Extrait simple	18	15	$^1/_6$
Id. déterminé	90	70	$^2/_9$
Ambe simple.	400	270	$^1/_8$
Id. déterminé.	8009	5100	$^5/_8$
Terne.	11747	5500	$^1/_2$
Quaterne.	511037	75000	$^6/_7$
Quine.	43940207	1000000	$^{43}/_{44}$

Lettre XIV, page 90.

Le tableau numérique contenu dans la 14e lettre ne renferme que les

coefficients du binôme dans ses puissances successives jusqu'à la 13e. En général si les probabilités de deux événements simples sont p et p', le développement qui suit, donnera tous les événements composés possibles en nombre m, qu'on pourra former avec les événements simples :

$$(p+p')^m = p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} p'^1 + \frac{m(m-1)}{1.2} p^{m-2} p'^2 + \text{etc.}$$

La répétition de l'événement m fois consécutives, a pour probabilité p^m, et le coefficient indique que cet événement est unique. L'événement composé de $m-1$ fois le premier et de une fois le second, a pour probabilité $\frac{m}{1} p^{m-1} p'^1$; et ainsi de suite. En posant $p=p'$, il vient

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Les diverses combinaisons où les deux événements simples se présentent m fois, sont donc au nombre de 2^m.

—

Lettre XIVe, page 93.

« En usant de ces diverses précautions, j'ai fait faire successivement 4096 tirages. »

Les boules étaient réellement tirées une à une, et remises dans l'urne après chaque tirage et après leur inscription; mais la série des boules tirées était ensuite partagée par groupes, en procédant d'une à une, de deux à deux, de trois à trois, etc.; ce qui, au fond, présentait les mêmes résultats que si l'on avait pris immédiatement les boules par une, par deux, par trois, etc., en supposant infini leur nombre dans l'urne.

Le tableau suivant, sous une forme double, présente les résultats de ces opérations. Je donne d'abord les résultats, tels qu'il ont été obtenus par les tirages successifs; puis les résultats réduits proportionnellement, pour devenir comparables aux nombres calculés dans le tableau de la lettre 14e, page 90.

Tableau indiquant le nombre absolu des boules blanches et noires qu'on a tirées d'une urne, en prenant une, deux, trois, quatre, etc., boules à la fois.

NOMBRE DES BOULES dans chaque tirage.	NOMBRE DES BOULES NOIRES COMPRIS DANS CHAQUE TIRAGE.													NOMBRE des tirages.
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
1 par 1 . .	2066	2030												4096
2 — 2 . .	543	980	525											2048
3 — 3 . .	185	518	474	188										1365
4 — 4 . .	69	268	370	246	71									1024
5 — 5 . .	30	125	277	224	136	27								819
6 — 6 . .	17	65	166	192	166	69	8							683
7 — 7 . .	9	34	104	151	148	95	40	4						585
8 — 8 . .	2	17	58	125	128	111	52	19	2					512
9 — 9 . .	2	7	28	86	80	113	80	34	5	1				455
10 — 10 . .	0	7	23	48	77	104	80	46	20	5	0			410
11 — 11 . .	0	3	13	35	58	78	84	55	32	12	2	0		372
12 — 12 . .	0	2	10	22	35	71	77	57	37	17	10	3	0	341

Tableau indiquant le nombre relatif des boules blanches et noires qu'on a tirées d'une urne, en prenant une, deux, trois, quatre, etc., boules à la fois.

NOMBRE DES BOULES dans chaque tirage	NOMBRE DES BOULES NOIRES COMPRIS DANS CHAQUE TIRAGE.													NOMBRE des boules blanches.
	0.	1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
1 par 1.	1.008	0.992												2
2 — 2.	1.06	1.91	1.02											4
3 — 3.	1.08	3.03	2.77	1.10										8
4 — 4.	1.07	4.18	5.78	3.84	1.11									16
5 — 5.	1.2	4.0	10.8	8.7	5.3	1.1								32
6 — 6.	1.6	6.1	15.5	18.0	15.5	6.5	0.8							64
7 — 7.	2.0	7.4	22.7	33.0	32.4	20.8	8.8	0.9						128
8 -- 8.	1.0	8.5	29.0	61.5	64.0	55.5	26.0	9.5	1.0					256
9 -- 9.	2.2	7.9	42.8	96.8	100.1	187.1	90.0	38.3	5.0	1.1				512
10 - 10.	0	17.5	57.4	119.9	192.3	239.7	199.8	114.9	49.9	12.5	0			1024
11 - 11.	0	17	72	195	319	429	462	303	176	66	11	0		2048
12 - 12.	0	17	120	204	420	853	925	685	444	204	120	36	0	4096

LETTRE XV, pages 101 à 102.

« C'est ce que j'ai fait dans la table qui se trouve à la suite de ces lettres, sous le nom d'*échelle de possibilité.* »

Échelles de possibilité et de précision.

GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque GROUPE. *Table A.*	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. *Table B.*	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque GROUPE. *Table C.*
499 boules blanches et 500 noires. .	1	0.025225	0.025225	1.000000
498 id. 501 id. . .	2	0.025124	0.050349	0.996008
497 id. 502 id. . .	3	0.024924	0.075273	0.988072
496 id. 503 id. . .	4	0.024627	0.099900	0.976285
495 id. 504 id. . .	5	0.024236	0.124136	0.960789
494 id. 505 id. . .	6	0.023756	0.147892	0.941764
493 id. 506 id. . .	7	0.023193	0.171085	0.919429
492 id. 507 id. . .	8	0.022552	0.193637	0.894040
491 id. 508 id. . .	9	0.021842	0.215479	0.865882
490 id. 509 id. . .	10	0.021069	0.236548	0.835261
489 id. 510 id. . .	11	0.020243	0.256791	0.802506
488 id. 511 id. . .	12	0.019372	0.276163	0.767956
487 id. 512 id. . .	13	0.018464	0.294627	0.731958
486 id. 513 id. . .	14	0.017528	0.312155	0.694860
485 id. 514 id. . .	15	0.016573	0.328728	0.657008
484 id. 515 id. . .	16	0.015608	0.344335	0.618736
483 id. 516 id. . .	17	0.014640	0.358975	0.580364
482 id. 517 id. . .	18	0.013677	0.372652	0.542197
481 id. 518 id. . .	19	0.012726	0.385378	0.504516
480 id. 519 id. . .	20	0.011794	0.397172	0.467576
479 id. 520 id. . .	21	0.010887	0.408060	0.431609
478 id. 521 id. . .	22	0.010008	0.418070	0.396815
477 id. 522 id. . .	23	0.009166	0.427236	0.363366
476 id. 523 id. . .	24	0.008360	0.435595	0.331407

GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque GROUPE. Table A.	ÉCHELLE de précision — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. Table B.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque GROUPE. Table C.
475 boules blanches et 524 noires. .	25	0.007594	0.443189	0.301050
474 id. 525 id. . .	26	0.006871	0.450060	0.272378
473 id. 526 id. . .	27	0.006191	0.456251	0.245451
472 id. 527 id. . .	28	0.005557	0.461809	0.220300
471 id. 528 id. . .	29	0.004968	0.466776	0.196935
470 id. 529 id. . .	30	0.004423	0.471199	0.175343
469 id. 530 id. . .	31	0.003922	0.475122	0.155493
468 id. 531 id. . .	32	0.003464	0.478586	0.137337
467 id. 532 id. . .	33	0.003047	0.481633	0.120816
466 id. 533 id. . .	34	0.002670	0.484304	0.105855
465 id. 534 id. . .	35	0.002330	0.486634	0.092375
464 id. 535 id. . .	36	0.002025	0.488659	0.080290
463 id. 536 id. . .	37	0.001753	0.490412	0.069504
462 id. 537 id. . .	38	0.001512	0.491924	0.059926
461 id. 538 id. . .	39	0.001298	0.493222	0.051461
460 id. 539 id. . .	40	0.001110	0.494332	0.044014
459 id. 540 id. . .	41	0.0009458	0.495278	0.037493
458 id. 541 id. . .	42	0.0008024	0.496081	0.031810
457 id. 542 id. . .	43	0.0006781	0.496759	0.026880
456 id. 543 id. . .	44	0.0005707	0.497329	0.022623
455 id. 544 id. . .	45	0.0004784	0.497808	0.018903
454 id. 545 id. . .	46	0.0003994	0.498207	0.015831
453 id. 546 id. . .	47	0.0003321	0.498539	0.013164
452 id. 547 id. . .	48	0.0002750	0.498814	0.010902
451 id. 548 id. . .	49	0.0002268	0.499041	0.008993
450 id. 549 id. . .	50	0.0001863	0.499227	0.007387
449 id. 550 id. . .	51	0.0001525	0.499380	0.006044
448 id. 551 id. . .	52	0.0001242	0.499504	0.004925
447 id. 552 id. . .	53	0.0001008	0.499605	0.003997
446 id. 553 id. . .	54	0.0000815	0.499686	0.003231
445 id. 554 id. . .	55	0.0000656	0.499752	0.002601

GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque groupe. *Table* A.	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. *Table* B.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque groupe. *Table* C.
444 boules blanches et 555 noires. .	56	0.0000526	0.499804	0.002086
443 id. 556 id. . .	57	0.0000421	0.499847	0.001669
442 id. 557 id. . .	58	0.0000334	0.499880	0.001324
441 id. 558 id. . .	59	0.0000265	0.499906	0.001049
440 id. 559 id. . .	60	0.0000209	0.499927	0.000828
439 id. 560 id. . .	61	0.0000164	0.499944	0.000650
438 id. 561 id. . .	62	0.0000128	0.499957	0.000509
437 id. 562 id. . .	63	0.0000100	0.499967	0.000397
436 id. 563 id. . .	64	0.0000077	0.499974	0.000308
435 id. 564 id. . .	65	0.0000060	0.499980	0.000238
434 id. 565 id. . .	66	0.0000046	0.499985	0.000183
433 id. 566 id. . .	67	0.0000035	0.499988	0.000140
432 id. 567 id. . .	68	0.0000027	0.4999912	0.000107
431 id. 568 id. . .	69	0.0000021	0.4999933	0.000081
430 id. 569 id. . .	70	0.0000016	0.4999948	0.000062
429 id. 570 id. . .	71	0.0000012	0.4999960	0.000047
428 id. 571 id. . .	72	0.0000009	0.4999969	0.000035
427 id. 572 id. . .	73	0.0000007	0.4999976	0.000026
426 id. 573 id. . .	74	0.0000005	0.4999981	0.000020
425 id. 574 id. . .	75	0.0000004	0.4999984	0.000014
424 id. 575 id. . .	76	0.0000003	0.4999987	0.000011
423 id. 576 id. . .	77	0.0000002	0.4999989	0.000008
422 id. 577 id. . .	78	0.00000014	0.4999990	0.000006
421 id. 578 id. . .	79	0.00000011	0.4999991	0.000004
420 id. 579 id. . .	80	0.00000004	0.4999992	0.000003

Le tableau de la page 90 et l'échelle des possibilités qui précède, donnent simplement les coefficients numériques dans le développement du binôme. Il serait donc superflu de s'y arrêter ici, s'il ne devenait très-difficile et même impossible de calculer ces coefficients par les

moyens ordinaires, quand le développement du binôme doit se faire à une puissance très-élevée. Il serait inutile d'ailleurs de calculer ses coefficients, puisque n à n seulement doivent être employés.

Je vais indiquer la méthode de calcul que j'ai suivie, et je ferai voir ensuite comment, d'un nombre de chances limité, on peut passer au cas d'un nombre de chances illimité et embrasser le problème dans sa plus grande généralité.

On sait que le développement du binôme à la puissance m, donne :

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2$$
$$+ \ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} a^{m-n} b^n.$$

Quand on considère a et b comme les probabilités de deux événements simples A et B, on sait encore que :

a^m	désigne la probabilité que, sur m épreuves,	A arrivera	m	fois,
$\frac{m}{1} a^{m-1} b$	»	»	»	A »	$m-1$ fois,
$\frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2$	»	»	A »	$m-2$ fois,
»	»	»	»	
»	»	»	»	
$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} a^{m-n} b^n$	»	A »	$m-n$ fois.

Quand les deux probabilités a et b sont égales, comme je l'ai supposé dans toute cette note, le développement se réduit aux coefficients des différents termes, et l'on a :

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Le coefficient de chaque terme désigne le nombre de chances que

chaque événement composé a pour lui, et le nombre total de ces chances se trouve représenté par :

$$2^m.$$

On reconnaîtra d'abord que le nombre total des chances doit être considérable, quand m est un nombre très-grand. En effet, en passant aux logarithmes, on a :

$$\log. 2^m = 0{,}30103\, m;$$

par conséquent 2^m se trouvera représenté par un nombre qui a environ autant de chiffres qu'il y a d'unités plus une, dans m multiplié par 0,3.

Maintenant voici la marche qui a été suivie pour former l'échelle des possibilités. Considérons d'abord que le terme général dans le développement du binôme est :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\quad\ldots\ldots\quad n};$$

et que le terme suivant serait

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3\quad\ldots\ldots\quad n(n+1)}.$$

Or, le rapport de ces deux quantités, que je représenterai par y_n et y_{n+1}, est

$$y_n : y_{n+1} = 1 : \frac{m-n}{n+1},$$

pour passer d'un terme au suivant, il suffira donc de multiplier le terme connu par la fraction $\frac{m-n}{n+1}$, puisque

$$y_{n+1} = y_n \times \frac{m-n}{n+1}.$$

Or, j'ai pris, pour *unité*, le terme du milieu dans le développement du

binôme, terme qui se trouve être le plus grand dans l'hypothèse que nous avons faite. Il représente la probabilité que, dans notre tirage de 999 boules, il y aura 500 boules blanches et 499 noires, ou 499 boules blanches et 500 noires.

La probabilité relative de l'événement voisin, c'est-à-dire du tirage de 498 boules blanches et de 501 noires, est

$$\frac{m-n}{n+1} = \frac{999-500}{500+1} = \frac{499}{501}.$$

La probabilité du tirage de 497 boules blanches et de 502 noires serait

$$\frac{499.\ 498}{501.\ 502},$$

et ainsi de suite. Ce calcul ne présente pas de grandes difficultés; c'est en le suivant qu'a été formée la série des nombres donnés dans la dernière colonne du tableau précédent, page 375. On peut en déduire facilement les nombres de la première colonne, donnés sous le titre d'*Échelle de possibilité*, table *A*.

En désignant en effet par a, a', a'', etc., chacun des nombres calculés dans la table *C*, et en faisant leur somme, on aura :

$$\Sigma a.$$

Alors chaque nombre de la nouvelle colonne, ou table *A*, exprimant la probabilité absolue de chacun des événements composés, deviendra successivement :

$$\frac{a}{\Sigma a},\ \frac{a'}{\Sigma a},\ \frac{a''}{\Sigma a},\ \text{etc.}$$

C'est ainsi qu'ont été formés les nombres de cette première colonne. Ceux de la seconde colonne, ou de la table *B*, ont été formés simplement par voie d'addition, et de la manière suivante *.

* Ces différents calculs ont été faits par M. Liagre, capitaine du génie, attaché à l'observatoire royal.

$$\frac{a}{\Sigma a}, \quad \frac{a+a'}{\Sigma a}, \quad \frac{a+a'+a''}{\Sigma a}, \text{ etc.}$$

La méthode qui vient d'être indiquée est expéditive pour le calcul, mais on peut désirer de connaître l'expression algébrique d'un terme quelconque du développement, quand le nombre des termes doit être infiniment grand.

Reprenons à cet effet le terme général

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,\ldots\ldots\,(m-n+1)}{1.\,2.\,3\quad\ldots\ldots\quad n}$$

Nous pouvons écrire ce terme sous la forme :

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,\ldots\ldots\,(m-n+1)}{1.\,2.\,3\quad\ldots\ldots\quad n} \times \frac{(m-n)\,\ldots\ldots\,3.\,2.\,1}{(m-n)\,\ldots\ldots\,3.\,2.\,1}.$$

cette expression se simplifie par les considérations suivantes. On a en général *

$$1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\,n = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\right)+\text{ etc.}$$

π est le rapport de la circonférence au diamètre, et e est la base des logarithmes népériens. Or, dans l'usage que nous ferons de cette formule, nous supposerons toujours n assez grand pour qu'on puisse réduire le second membre de cette formule à son premier terme. Le terme général du développement du *binôme* deviendra ainsi

$$y_{n+1} = \frac{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \times (m-n)^{m-n} e^{-m+n}\sqrt{2\pi(m-n)}}.$$

Telle est la formule qui fait connaître le nombre des chances que

* Cette formule, due à Stierling, est fréquemment employée dans le calcul des probabilités. Voyez Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, p. 129 ; et Poisson, *Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 175.

chaque événement présente en sa faveur; elle se rapporte ici au nombre des chances de l'événement composé où A arrive $m-n$ fois, et B un nombre n de fois.

Examinons d'abord quelle serait la valeur du terme *maximum* dans notre développement. Ce terme se trouvant à égale distance des extrêmes, on aura $n=\frac{m}{2}$; et, en substituant dans la formule précédente, il viendra

$$\text{terme moyen} = 2^m \sqrt{\frac{2}{\pi m}}.$$

Or, cette quantité, divisée par 2^m, somme de toutes les chances, donnera la *probabilité* du terme moyen P, qui sera

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi m}}.$$

On voit que *cette probabilité décroît en raison inverse de la racine carrée de* m. C'est-à-dire que la probabilité que les deux événements sont en même nombre et se contre-balancent, se trouve être en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations. Plus le nombre des observations augmente et plus la probabilité du terme moyen diminue.

Comparons maintenant la probabilité d'un événement composé quelconque, à celle du terme moyen, on aura

$$p_{n+1} : P = \frac{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \times (m-n)^{m-n} e^{-m+n} \sqrt{2\pi(m-n)}} : 2^m \sqrt{\frac{2}{\pi m}}.$$

En réduisant, on trouve

$$p_{n+1} = P \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{m+1}}{n^{n+\frac{1}{2}} \times (m-n)^{m-n+\frac{1}{2}}}.$$

Faisons $m = n + n'$ et remarquons que le numérateur multiplié par P

est une quantité constante que nous pouvons représenter par C, l'équation prendra cette forme plus simple

$$p_{n+1} = \frac{C}{n^{n+\frac{1}{2}}\, n'^{n'+\frac{1}{2}}}.$$

Cette dernière expression montre que la probabilité d'un événement composé quelconque est inversement proportionnelle au produit de ses distances aux deux extrémités du développement du binôme, ces distances étant élevées respectivement aux puissances désignées par leur rang plus $^1/_2$.

Pour tout autre développement du binôme à la puissance μ, on aurait également

$$\pi_{\nu+1} = \frac{\Pi \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1}}{\nu^{\nu+\frac{1}{2}}\, \nu'^{\nu'+\frac{1}{2}}}.$$

Posons $\mu = m\alpha$, et faisons aussi $\nu = n\alpha$ et $\nu' = n'\alpha$; l'ordonnée qui représente le terme général, sera élevée, sur l'axe des abscisses, au point correspondant à celui occupé par l'ordonnée de la première ligne. Or, ces substitutions dans la formule donneront

$$\pi_{\nu+1} = \frac{\Pi \left(\frac{m\alpha}{2}\right)^{m\alpha+1}}{(n\alpha)^{n\alpha+\frac{1}{2}} \cdot (n'\alpha)^{n'\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Les quantités n et m étant très-grandes en comparaison de l'unité, on peut écrire

$$\frac{\pi_{\nu+1}}{\Pi} = \left\{ \frac{\left(\frac{m\alpha}{2}\right)^{m+1}}{(n\alpha)^{n+\frac{1}{2}} \cdot (n'\alpha)^{n'+\frac{1}{2}}} \right\}^{\alpha} = \left\{ \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{m+1}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot n'^{n'+\frac{1}{2}}} \right\}^{\alpha}.$$

Cette dernière quantité n'est autre que la valeur de $\frac{p_{n+1}}{P}$ élevée à

la puissance α. On a donc

$$\frac{\pi_{\nu+1}}{\Pi} = \left(\frac{p_{n+1}}{P}\right)^{\alpha}.$$

A cause de $\mu = m\alpha$, on a encore

$$\left(\frac{\pi_{\nu+1}}{\Pi}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{p_{n+1}}{P}\right)^{\frac{1}{m}} = \text{constante.}$$

Dans notre table C de la page 375, nous avons calculé toutes les valeurs appréciables de

$$\frac{p_{n+1}}{P} \text{ ou } p_{n+1},$$

en prenant P pour unité. Ces rapports conviennent donc, pour une autre courbe quelconque, après qu'on les a élevés à la puissance α, et ils répondent respectivement à des ordonnées semblablement situées sur les axes m et μ.

Dans cette même table, nous avons pris, pour unité, la plus grande ordonnée, rien n'empêche d'en faire autant pour une autre courbe, et l'on a

$$(\pi_{\nu+1})^{\frac{1}{\mu}} = (p_{n+1})^{\frac{1}{m}}.$$

—— Nous allons voir maintenant comment on peut effectuer le passage du fini à l'infini, ou substituer à la considération d'un nombre de chances limité un nombre de chances infiniment grand. Nous avons vu que, pour passer d'une ordonnée à la suivante, il fallait écrire

$$y_{n+1} = y_n \frac{m-n}{n+1};$$

or, m est l'axe entier des abscisses que nous représentons par $2m_1$, en comptant à partir de l'ordonnée du milieu; et, en comptant aussi de là les abscisses, nous aurons $n = m_1 - x$, ce qui donnera

$$y_{n+1} = y_n \frac{2m_1 - m_1 + x}{m_1 - x + 1} = y_n \frac{m_1 + x}{m_1 - x + 1}.$$

De l'ordonnée y_{n+1} retranchons celle qui suit immédiatement,

$$y_{n+1} - y_n = y_n \frac{2x - 1}{m_1 - x + 1}.$$

Le signe du second membre dépendra de ce qu'on aura y_{n+1} plus ou moins grand que y_n; nous prendrons ici le signe —.

En considérant la différence des ordonnées du premier membre, dans le passage du fini à l'infini, comme exprimant la tangente de la courbe, leur distance étant prise pour unité, on aura

$$\frac{dy}{dx} = -y \frac{2x}{m_1 - x},$$

en remarquant d'ailleurs que m_1 et x sont des quantités infinies par rapport à notre unité. Mais ces quantités diffèrent considérablement entre elles; les ordonnées n'ont une valeur appréciable que dans le voisinage de l'ordonnée du milieu, quand on suppose les épreuves infiniment multipliées; on peut donc, dans le dénominateur, négliger x sans erreur sensible, en présence de m_1; on a définitivement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{m_1} y.$$

Pour intégrer, on écrira

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{m_1},$$

d'où

$$\log. y = -\frac{x^2}{m_1} + \text{constante}.$$

Pour $x=o$, on a l'ordonnée *maximum* du milieu de la courbe; je la désignerai par Y. On aura donc, en repassant aux nombres

$$y = Y.e^{-\frac{x^2}{m_1}}.$$

Telle est l'équation de la courbe de possibilité. Il existe un rapport qu'on peut assigner entre la somme de toutes les ordonnées de la courbe ou bien sa surface, et l'ordonnée du milieu. Ce rapport remarquable est $\sqrt{\pi m_1}$, en sorte qu'on a

$$\text{surface ou } S = Y\sqrt{\pi m_1},$$

π est le rapport de la circonférence au diamètre.

Quand on ne considère qu'une seule courbe, il devient indifférent de prendre, pour les abscisses et les ordonnées, telle unité que l'on veut. Si l'on prend $\frac{1}{\sqrt{m_1}}$ pour unité des abscisses, la première équation devient

$$y = Ye^{-x^2},$$

par là on obtient, pour surface de la courbe,

$$S = Y\sqrt{\pi};$$

mais cette surface représente la somme de toutes les probabilités, qui doit être égale à 1, symbole de la certitude, on a donc

$$S = 1 = Y\sqrt{\pi}; \quad \text{et } Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

ou bien encore, pour l'équation de la courbe,

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e.^{-x^2}.$$

La surface de la courbe contenue entre l'ordonnée moyenne et une

autre ordonnée dont l'abscisse serait x, peut être considérée comme exprimant la probabilité des erreurs comprises depuis o jusqu'à x. Or, on aura

$$\text{surface} = \int_x^o y dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^o e^{-x^2} dx.$$

On pourrait intégrer en employant le développement connu *,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

mais il existe des méthodes plus expéditives.

M. Cournot, dans son *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, a calculé, au moyen de la formule précédente, une table assez étendue que nous avons jugé à propos de reproduire ici, pour la comparer à la nôtre **. Les valeurs ont été déduites de celles de la fonction $\int_t^\infty e^{-t^2} dt$ donnée par Kramp dans l'*Analyse des réfractions astronomiques*.

Nous pouvons juger maintenant si notre table de précision, calculée dans l'hypothèse de mille espèces d'événements différents, s'écarte beaucoup de celle qu'on aurait obtenue en adoptant le cas de la nature, celui où la probabilité de l'événement attendu peut passer par toutes les nuances possibles.

Examinons d'abord comment les nombres donnés dans notre table, se trouvent rangés dans la table calculée par M. Cournot; seulement il faudra les doubler pour les rendre comparables. Notre table, en effet, donne la somme des probabilités pour un côté de l'axe de symétrie seulement, et celle de M. Cournot, pour les deux côtés à la fois. Pour ne pas trop étendre le tableau, bornons-nous à donner les 10 premiers

* C'est d'après cette méthode que M. Hagen a calculé une petite table, pag. 50 de son ouvrage, *Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*. Berlin, 1837.

** Cet ouvrage a été publié en 1843, chez Hachette, à Paris. Je n'en ai eu connaissance, ainsi que du précédent, que lorsque mes tables étaient déjà calculées.

nombres de notre table *B*, en les doublant, puis ceux qui suivent à dix rangs de distance. La première colonne indique ce rang, et la seconde, le rang correspondant dans la table française.

RANG DES PROBABILITÉS.		VALEUR de LA PROBABILITÉ.	RANG DES PROBABILITÉS.		VALEUR de LA PROBABILITÉ.
TABLE *B*.	TABLE de M. Cournot.		TABLE *B*.	TABLE de M. Cournot.	
1	4,5	0,050450	9	40,5	0,430958
2	9,0	0,100608	10	44,5	0,473096
3	13,5	0,150546	20	89,5	0,794344
4	18,0	0,190800	30	134,5	0,942398
5	22,4	0,248272	40	179,0	0,988664
6	26,9	0,295784	50	224,0	0,998454
7	31,4	0,342170	60	269,0	0,999654
8	36,8	0,387274	67	299,0	0,999976

La probabilité placée au 67e rang dans notre table, se trouve au 299e rang dans la table de M. Cournot. Or, le rapport $\frac{299}{67}$ égale à peu près 4,5 ; c'est aussi le rapport que l'on trouverait pour les places respectives de toutes les autres probabilités dans les deux tables calculées, qui présentent ainsi un accord aussi satisfaisant qu'on peut le désirer.

On voit de plus que, sans recourir à des moyens d'intégration, on aurait reproduit la table de M. Cournot, en calculant le développement du binôme, comme nous l'avons fait, à la puissance 1 000 $(\frac{299}{67})^2$ ou à la puissance 20 000 environ.

TABLE

des valeurs de la fonction $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$,

calculée d'après celle des valeurs de la fonction $\int_t^\infty e^{-t^2} dt$, donnée par Kramp, dans l'*Analyse des réfractions astronomiques ;* Strasbourg, an VII.

t	P	t	P	t	P	t	P
0,00	0,000 00	0,25	0,276 32	0,50	0,520 50	0,75	0,711 16
0,01	0,011 28	0,26	0,286 90	0,51	0,529 24	0,76	0,717 54
0,02	0,022 57	0,27	0,297 42	0,52	0,537 90	0,77	0,723 82
0,03	0,033 84	0,28	0,307 88	0,53	0,546 46	0,78	0,730 01
0,04	0,045 11	0,29	0,318 28	0,54	0,554 94	0,79	0,736 10
0,05	0,056 37	0,30	0,328 63	0,55	0,563 32	0,80	0,742 10
0,06	0,067 62	0,31	0,338 92	0,56	0,571 62	0,81	0,748 00
0,07	0,078 86	0,32	0,349 13	0,57	0,579 82	0,82	0,753 81
0,08	0,090 08	0,33	0,359 28	0,58	0,587 92	0,83	0,759 52
0,09	0,101 28	0,34	0,369 36	0,59	0,595 94	0,84	0,765 14
0,10	0,112 46	0,35	0,379 38	0,60	0,603 86	0,85	0,770 67
0,11	0,123 62	0,36	0,389 33	0,61	0,611 68	0,86	0,776 10
0,12	0,134 76	0,37	0,399 21	0,62	0,619 41	0,87	0,781 44
0,13	0,145 87	0,38	0,409 01	0,63	0,627 05	0,88	0,786 69
0,14	0,156 95	0,39	0,418 74	0,64	0,634 59	0,89	0,791 84
0,15	0,168 00	0,40	0,428 39	0,65	0,642 03	0,90	0,796 91
0,16	0,179 01	0,41	0,437 97	0,66	0,649 38	0,91	0,801 88
0,17	0,189 99	0,42	0,447 47	0,67	0,656 63	0,92	0,806 77
0,18	0,200 94	0,43	0,456 89	0,68	0,663 78	0,93	0,811 56
0,19	0,211 84	0,44	0,466 23	0,69	0,670 84	0,94	0,816 27
0,20	0,222 70	0,45	0,475 48	0,70	0,677 80	0,95	0,820 89
0,21	0,233 51	0,46	0,484 66	0,71	0,684 67	0,96	0,825 42
0,22	0,244 30	0,47	0,493 74	0,72	0,691 43	0,97	0,829 87
0,23	0,255 02	0,48	0,502 75	0,73	0,698 10	0,98	0,834 23
0,24	0,265 70	0,49	0,511 67	0,74	0,704 68	0,99	0,838 51

t	P	t	P	t	P	t	P
1,00	0,842 70	1,35	0,943 76	1,70	0,983 790	2,05	0,996 2580
1,01	0,846 81	1,36	0,945 56	1,71	0,984 406	2,06	0,996 4235
1,02	0,850 84	1,37	0,947 31	1,72	0,985 002	2,07	0,996 5821
1,03	0,854 78	1,38	0,949 02	1,73	0,985 578	2,08	0,996 7344
1,04	0,858 65	1,39	0,950 67	1,74	0,986 134	2,09	0,996 8805
1,05	0,862 44	1,40	0,952 28	1,75	0,986 671	2,10	0,997 0206
1,06	0,866 14	1,41	0,953 85	1,76	0,987 190	2,11	0,997 1548
1,07	0,869 77	1,42	0,955 38	1,77	0,987 690	2,12	0,997 2836
1,08	0,873 35	1,43	0,956 86	1,78	0,988 174	2,13	0,997 4070
1,09	0,876 80	1,44	0,958 30	1,79	0,988 640	2,14	0,997 5253
1,10	0,880 20	1,45	0,959 69	1,80	0,989 090	2,15	0,997 6386
1,11	0,883 53	1,46	0,961 05	1,81	0,989 524	2,16	0,997 7471
1,12	0,886 79	1,47	0,962 37	1,82	0,989 943	2,17	0,997 8511
1,13	0,889 97	1,48	0,963 65	1,83	0,990 346	2,18	0,997 9507
1,14	0,893 08	1,49	0,964 90	1,84	0,990 735	2,19	0,998 0459
1,15	0,896 12	1,50	0,966 105	1,85	0,991 111	2,20	0,998 1371
1,16	0,899 10	1,51	0,967 276	1,86	0,991 472	2,21	0,998 2244
1,17	0,902 00	1,52	0,968 413	1,87	0,991 820	2,22	0,998 3079
1,18	0,904 84	1,53	0,969 516	1,88	0,992 156	2,23	0,998 3878
1,19	0,907 61	1,54	0,970 585	1,89	0,992 479	2,24	0,998 4642
1,20	0,910 31	1,55	0,971 622	1,90	0,992 790	2,25	0,998 5373
1,21	0,912 96	1,56	0,972 628	1,91	0,993 089	2,26	0,998 6071
1,22	0,915 53	1,57	0,973 602	1,92	0,993 378	2,27	0,998 6739
1,23	0,918 05	1,58	0,974 546	1,93	0,993 655	2,28	0,998 7375
1,24	0,920 50	1,59	0,975 461	1,94	0,993 922	2,29	0,998 7984
1,25	0,922 90	1,60	0,976 348	1,95	0,994 179	2,30	0,998 8568
1,26	0,925 24	1,61	0,977 206	1,96	0,994 426	2,31	0,998 9124
1,27	0,927 51	1,62	0,978 038	1,97	0,994 663	2,32	0,998 9655
1,28	0,929 73	1,63	0,978 842	1,98	0,994 891	2,33	0,999 0162
1,29	0,931 90	1,64	0,979 621	1,99	0,995 111	2,34	0,999 0646
1,30	0,934 01	1,65	0,980 375	2,00	0,995 3223	2,35	0,999 1107
1,31	0,936 06	1,66	0,981 104	2,01	0,995 5248	2,36	0,999 1548
1,32	0,938 06	1,67	0,981 810	2,02	0,995 7194	2,37	0,999 1968
1,33	0,940 01	1,68	0,982 492	2,03	0,995 9064	2,38	0,999 2369
1,34	0,941 91	1,69	0,983 152	2,04	0,996 0859	2,39	0,999 2751

t	P	t	P	t	P
2,40	0,999 3115	2,60	0,999 763 96	2,80	0,999 924 90
2,41	0,999 3402	2,61	0,999 776 71	2,81	0,999 929 31
2,42	0,999 3703	2,62	0,999 788 81	2,82	0,999 933 39
2,43	0,999 4108	2,63	0,999 800 29	2,83	0,999 937 25
2,44	0,999 4408	2,64	0,999 811 18	2,84	0,999 940 90
2,45	0,999 4694	2,65	0,999 821 52	2,85	0,999 944 34
2,46	0,999 4966	2,66	0,999 831 31	2,86	0,999 947 60
2,47	0,999 5226	2,67	0,999 840 60	2,87	0,999 950 67
2,48	0,999 5472	2,68	0,999 849 41	2,88	0,999 953 58
2,49	0,999 5707	2,69	0,999 857 76	2,89	0,999 956 32
2,50	0,999 593 05	2,70	0,999 865 67	2,90	0,999 958 90
2,51	0,999 614 29	2,71	0,999 873 16	2,91	0,999 961 34
2,52	0,999 634 50	2,72	0,999 880 20	2,92	0,999 963 65
2,53	0,999 653 71	2,73	0,999 886 98	2,93	0,999 965 82
2,54	0,999 671 98	2,74	0,999 893 35	2,94	0,999 967 86
2,55	0,999 689 34	2,75	0,999 899 38	2,95	0,999 969 80
2,56	0,999 705 84	2,76	0,999 905 08	2,96	0,999 971 62
2,57	0,999 721 51	2,77	0,999 910 48	2,97	0,999 973 33
2,58	0,999 736 40	2,78	0,999 915 59	2,98	0,999 974 93
2,59	0,999 750 54	2,79	0,999 920 42	2,99	0,999 976 47

$t = 3,00$ P = 0,999 977 909 3....
4,00 0,999 999 984 582 8....
5,00 0,999 999 999 998 431 53....

LETTRE XVII, page 116.

« Comparée à la théorie des balances ou à celle des leviers en mécanique, la théorie des moyennes offre des analogies très-curieuses. »

On a différentes longueurs entre lesquelles on veut prendre une moyenne. La longueur A s'est répétée un nombre p de fois; la longueur A', un nombre p' de fois, et ainsi de suite. Si M est la moyenne

de toutes ces grandeurs, on doit avoir

$$M(p + p' + p'' + p''' + \text{etc.}) = Ap + A'p' + A''p'' + A'''p''' + \text{etc.}$$

Mais on peut poser

$$A = M - a,\ A' = M - a,\ A'' = M - a'',\ \text{etc.}$$

a, a', a'', etc., étant les distances à l'extrémité de la moyenne M, tandis que A, A', A'', etc., sont les distances à une origine commune. La substitution donne

$$Ap + A'p' + A''p'' + A'''p''' + \text{etc.} = M(p + p' + p'' + p''' + \text{etc.}) - (ap + a'p' + a''p'' + \text{etc.}).$$

En vertu de la première équation, on aura

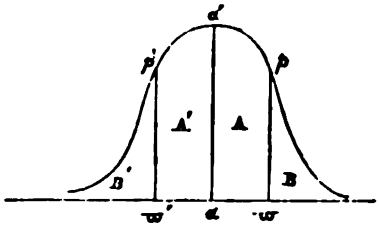
$$ap + a'p' + a''p'' + a'''p''' + \text{etc.} = 0.$$

Sous le point de vue de la mécanique, les moments statiques ap, $a'p'$, $a''p''$, se font donc équilibre autour du point extrême de la moyenne M, qui répond au centre de gravité.

La première équation montre de plus qu'à tous les leviers A, A', A'', A''', etc., chargés respectivement de poids proportionnels aux nombres p, p', p'', p''', et placés à leur extrémité opposée à l'origine commune, on peut substituer un seul levier M chargé de la somme de tous les poids p, p', p'', etc.

LETTRE XVIII, page 122.

« C'est la grandeur de l'erreur probable qui nous servira désormais de *module de précision.* »



La surface de la courbe de précision est représentée par 1, comme

formant la somme de toutes les probabilités relatives au même événement. Nous avons vu qu'on nomme *erreur probable*, celle représentée par l'abscisse qui correspond à la demi-surface de la courbe; ainsi, des deux côtés de l'ordonnée *maximum* aa', et à des distances égales $a\omega$ et $a\omega'$, il faut concevoir deux ordonnées égales ωp et $\omega' p'$ qui comprennent entre elles une portion $\omega'\omega pa'p'$ de la surface équivalente à celles qui se trouvent au delà de ces mêmes ordonnées jusqu'aux dernières limites de la courbe. Dans la première tombent les plus petites erreurs; on peut la représenter par $A + A'$, et l'autre par $B + B'$; à cause de la symétrie de la courbe $A = A'$ et $B = B'$. Or, on peut prendre les deux portions de surface A et B dans différents rapports, de manière, par exemple, que B soit à A comme 1 est à 1, 2, 4, 8, 16, etc. La portion de surface A qui correspond aux moindres erreurs, sera successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{17}$, etc., de la demi-surface S de la courbe, c'est-à-dire que l'ordonnée $p\omega$ s'écarte successivement de aa'. Désignons par P le rapport de A à la demi-surface de la courbe, ou à $\frac{1}{2}$, et par π l'abscisse $a\omega$, ou l'erreur qui lui correspond, nous pourrons former le tableau suivant * :

RAPPORT entre LES PORTIONS DE SURFACE B et A.	$P = \frac{A}{2(A+B)}$ ou portion de LA DEMI-SURFACE de la courbe S.	π L'ERREUR ou LE RANG DANS L'ÉCHELLE de précision.	GRANDEUR de l'erreur π par rapport à L'ERREUR PROBABLE ω.
1 : 1	0,2500	10,67 = ω	1,00 × ω
1 : 2	0,3333	15,4	1,43 × ω
1 : 4	0,4000	20,3	1,90 × ω
1 : 8	0,4444	25,2	2,36 × ω
1 : 16	0,4706	29,9	2,80 × ω
1 : 32	0,4848	34,2	3,21 × ω
1 : 64	0,4923	31,3	3,59 × ω
1 : 128	0,4961	42,1	3,95 × ω
1 : 256	0,4981	45,7	4,38 × ω
1 : 512	0,4990	49,0	4,59 × ω
1 : 1024	0,4995	52,0	4,88 × ω

* Ce tableau est emprunté à l'ouvrage allemand de M. Hagen, p. 57.

On voit qu'on peut parier 1 contre 1, qu'il y aura autant d'erreurs plus grandes que d'autres plus petites que l'erreur probable ω. On peut parier 1 contre 2 que l'erreur sera 1,43 de l'erreur probable; 1 contre 4 que l'erreur sera 1,90 de l'erreur probable; et 1 contre 1024 que l'erreur sera 4,88 fois l'erreur probable.

Du tableau précédent, au moyen de l'interpolation, on déduit le suivant :

OU PEUT PARIER		QUE L'ERREUR NE DÉPASSERA PAS
1	contre 1	1 ω = erreur probable.
4,6385	id. 1	2 ω
22,230	id. 1	3 ω
158,59	id. 1	4 ω
1384,0	id. 1	5 ω
20000	id. 1	6 ω

On peut donc parier 20000 contre 1 que l'erreur ne dépasse pas six fois l'erreur probable.

L'ordonnée $p\omega$, qui correspond à l'erreur probable, étant comparée à l'ordonnée *maximum* de la courbe, vaut 0,84536 d'après la table C, indiquant la probabilité relative de chaque tirage. En désignant la première ordonnée par p et l'ordonnée *maximum* par a, on a donc

$$p = 0{,}84536a.$$

Aux deux valeurs égales de p correspondent les erreurs probables $+\omega$ et $-\omega$.

Dans une série d'observations, comme nous l'avons vu, les erreurs se distribuent proportionnellement aux grandeurs des ordonnées de la courbe. Quand une fois l'on a su déterminer l'erreur probable, on reconnaît facilement, par le tableau précédent, la probabilité d'avoir fait une erreur de grandeur donnée.

—

Lettre XVIII.

Soient x, x', x'', x''', etc., les résultats d'observations qui méritent une égale confiance, leur *moyenne arithmétique* sera la valeur la plus probable du nombre cherché *. Elle est

$$X = \frac{x + x' + x'' + x'' + \text{etc.}}{N} = \frac{1}{N} \Sigma x.$$

N est le nombre des observations ; Σx est leur somme. Soit ε la différence entre notre moyenne X et une valeur particulière x, on aura

$$\begin{aligned} \varepsilon &= X - x \\ \varepsilon' &= X - x' \\ \varepsilon'' &= X - x'' \\ &\vdots \end{aligned}$$

les quantités ε, ε', ε'', peuvent être considérées comme les erreurs des observations particulières. Écrivons

$$\Sigma \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \text{etc.};$$

La quantité

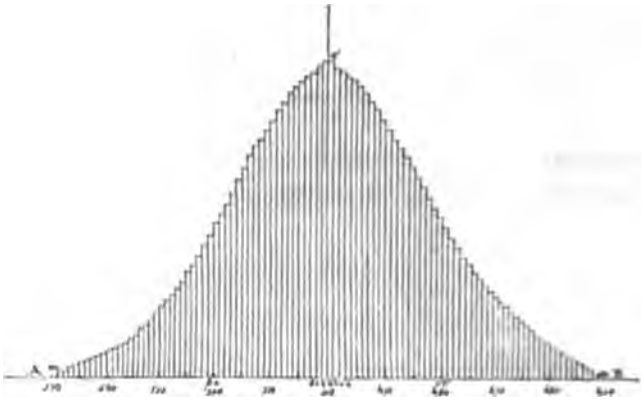
$$P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$$

est le poids (*pondus*) de la valeur X, c'est-à-dire le poids de la valeur de la moyenne de toutes les quantités, x, x', x'', x'''... On voit sans peine que P sera d'autant plus grand, que le nombre N des observations sera plus considérable, et que les erreurs ε, ε', ε'' seront moindres.

Nous remarquerons que les quantités ε, ε', ε'' sont les abscisses, et les quantités x, x', x'',.... les ordonnées de notre courbe de possibilité.

* Cette note est extraite partiellement du dictionnaire de Gehler, article *Wahrscheinlichkeits-Rechnung* et de l'ouvrage de Hagen.

Quand les chances pour les erreurs en plus sont égales aux chances pour les erreurs en moins, les erreurs positives et négatives se placent symétriquement des deux côtés de la moyenne,



et l'on a

$$+\varepsilon,\ -\varepsilon,\ +\varepsilon',\ -\varepsilon',\ +\varepsilon'',\ -\varepsilon'',\ \text{etc.}$$

Les carrés des erreurs donnent la somme

$$2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 + 2\varepsilon''^2 + \text{etc.} = 2\Sigma\varepsilon^2.$$

Nommons maintenant Q^2 la moyenne arithmétique des carrés de toutes les erreurs, nous aurons

$$Q^2 = \frac{2\Sigma\varepsilon^2}{N}.$$

Cette quantité Q^2 est d'une grande importance. En la faisant entrer

dans l'expression du poids de la moyenne, on a

$$P = \frac{N}{Q^2}.$$

D'après sa propriété de moyenne, il faut que $Q^2 = \frac{1}{2}$; d'où $Q = 0{,}70711$ en parties de l'unité dont $\omega = 0{,}4769363$. Ainsi

$$\omega = \frac{0{,}47694}{0{,}70711} Q = 0{,}67450.\ Q,$$

et réciproquement

$$Q = 1{,}4826.\ \omega.$$

ω est la grandeur de l'erreur probable ou l'abscisse de la courbe de possibilité pour la surface $^1/_4$; son rang dans notre table de précision est à peu près 10,66, et par conséquent le rang de Q dans cette même table est 15,805, c'est-à-dire qu'il faut reculer la limite jusqu'à ce rang, pour que la surface de la courbe de possibilité soit 0,70711 et représente la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés de toutes les erreurs.

Il faut remarquer que ω n'exprime que le nombre abstrait 0,4769363; quand on passe à l'application, la quantité ω devient un nombre concret. Soit E cette *erreur probable* que l'on fait dans la détermination de X. C'est, comme nous l'avons vu, l'abscisse de la courbe de possibilité qui correspond à la portion de surface équivalente à celle placée sur le reste de l'axe. On a, pour cette erreur probable,

$$E = \frac{\omega}{\sqrt{P}}.$$

Si l'on prend pour unité le poids P, l'erreur probable E sera constante et vaudra ω. Si l'on prend a comme constante, E est réciproquement proportionnelle à la racine carrée du *poids* de la moyenne.

Ainsi, les calculs relatifs à l'ascension droite de la polaire nous est montré que la moitié des observations tombaient entre les limites $+\omega$ et $-\omega$ ($=10,66$), et que ces limites embrassaient $1^s,61$; donc, dans l'hypothèse de $P = 1$, on a

$$E = \omega = 0^s,805.$$

L'*erreur probable* est comprise dans l'étendue $0^s,805$.

Quand on a E, on peut déduire la valeur du poids P par la formule

$$P = \frac{\omega^2}{E^2}.$$

On fait également usage de l'*erreur moyenne*, qui est la somme des produits de chaque erreur particulière par sa probabilité. Cette erreur moyenne ρ, que l'on fait en déterminant X, est exprimée par

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0,282095}{\sqrt{P}}.$$

π est le rapport de la circonférence au diamètre 3,14159. Les deux erreurs E et ρ sont liées ainsi par les relations

$$\rho = 0,59147\,E; \text{ et } E = 1,69069\,\rho.$$

les quantités ρ et E se rapportent à la moyenne X. D'après les relations précédentes, il est évident que l'*erreur moyenne*, dans le calcul de l'ascension droite de la polaire, donnerait

$$\rho = 0,59147 \times 1^s,61\,\rho$$

Pour notre table, quand on fait usage de l'erreur moyenne, il faut écrire

$$\rho = 0,59147 \times 10,66 = 6,30.$$

L'erreur moyenne correspond ainsi au rang 6,30 dans notre table de précision.

On peut considérer aussi l'*erreur probable de chaque observation individuellement*, comme nous l'avons fait pour la moyenne générale; et alors on a

$$e = \omega \sqrt{\frac{N}{P}}\,; \text{ ou bien } e = E\sqrt{N};$$

l'erreur particulière, comparée à l'erreur probable, est donc d'autant plus grande que N est plus fort; et le rapport des deux erreurs est comme la racine carrée du nombre des observations.

On peut écrire encore, en faisant usage du poids de la moyenne arithmétique des carrés de toutes les erreurs

$$e = \omega \times Q.$$

L'*erreur réelle* peut être plus ou moins grande pour chaque observation particulière, cependant ces variations sont resserrées dans des limites déterminées par le calcul. Les *limites de l'erreur réelle* de chaque observation particulière, sont

$$e\left(1 + \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right), \text{ ou } E\left(0{,}4769363 + \sqrt{N}\right).$$

On peut parier 1 contre 1 que la véritable valeur e tombe entre les limites

$$E\left(0{,}4769363 + \sqrt{N}\right), \text{ et } E\left(0{,}4769363 - \sqrt{N}\right).$$

—

Lettre XX, page 136.

Mesures de la circonférence des poitrines des soldats écossais.

MESURES de la POITRINE.	NOMBRE d'hommes.	NOMBRE PROPORTIONNEL.	PROBABILITÉ d'après L'OBSERVATION.	RANG dans LA TABLE.	RANG d'après le CALCUL.	PROBABILITÉ d'après LA TABLE.	NOMBRE d'OBSERVATIONS calculé.
Pouces.							
33	3	5	0,5000			0,5000	7
34	18	31	0,4995	52	50	0,4995	29
35	81	141	0,4964	42,5	42,5	0,4964	110
36	185	322	0,4823	33,5	34,5	0,4854	325
37	420	732	0,4501	26,0	26,5	0,4531	732
38	749	1305	0,3769	18,0	18,5	0,3799	1333
39	1073	1867	0,2464	10,5	10,5	0,2466	1838
			0,0597	2,5	2,5	0,0628	
40	1079	1882	0,1285	5,5	5,5	0,1359	1967
41	934	1628	0,2913	13	13,5	0,3034	1675
42	658	1148	0,4061	21	21,5	0,4130	1006
43	370	645	0,4706	30	29,5	0,4699	569
44	92	160	0,4866	35	37,5	0,4911	221
45	50	87	0,4953	41	45,5	0,4980	69
46	21	38	0,4991	49,5	53,5	0,4996	16
47	4	7	0,4998	56	61,8	0,4999	3
48	1	2	0,5000			0,5000	1
	5738	1,0000					1,0000

Le tableau qui précède est formé exactement de la même manière que celui qui concerne les mesures des ascensions droites de la polaire; je crois donc pouvoir me dispenser d'entrer dans de nouveaux détails sur les indications de chaque colonne.

Je remarquerai que les groupes d'observations procèdent par différences de 1 pouce anglais, et que les nombres qui leur correspondent dans la table calculée, se présentent à huit rangs de distance. Pour 21 rangs, on aurait donc proportionnellement $2^{\text{pouces}},625$ ou $66^{\text{mm}},674$. L'écart probable est donc de $33^{\text{mm}},34$ environ. Cet écart peut paraître

assez grand; il tient du reste moins à la précision des mesures qui paraissent bien faites, qu'à la nature des éléments à mesurer qui étaient très-divers.

—

LETTRE XXI, page 140.

Taille des conscrits français.

MESURES de LA TABLE.	NOMBRE d' HOMMES.	PROBABILITÉ d'après L'OBSERVATION.	RANG dans LA TABLE.	RANG d'après le CALCUL.	PROBABILITÉ d'après LA TABLE.	NOMBRE d'hommes calculés.
De 1m,327 à 1m,354				62,2	0,49996	14
1,354 à 1,381				56,4	0,49982	47
1,381 à 1,408				50,6	0,49935	164
1,408 à 1,435				44,8	0,49771	449
1,435 à 1,462	28620	0,50000	»	39,0	0,49322	1105
1,462 à 1,489				33,2	0,48217	2370
1,489 à 1,516				27,4	0,45847	4440
1,516 à 1,543				21,6	0,41407	7285
1,543 à 1,570				15,8	0,34122	10467
1,570 à 1,597	11580	0,21380	9,	10,0	0,23655	13182
1,597 à 1,624	13990	0,09800	4,	4,2	0,10473	14502
		0,04190	1,6	1,6	0,04029	
1,624 à 1,651	14410	0,18600	7,5	7,4	0,18011	13982
1,651 à 1,678	11410	0,30010	13,5	13,2	0,29814	11803
1,678 à 1,705	8780	0,38790	19,	19,0	0,38559	8725
1,705 à 1,732	5530	0,44320	25,	24,8	0,44166	5527
1,732 à 1,759	3190	0,47510	31,	30,6	0,47355	3187
1,759 à 1,786				36,4	0,48936	1581
1,786 à 1,813				42,2	0,49621	685
1,813 à 1,840	2490	0,50000	»	48,0	0,49881	260
1,840 à 1,867				53,8	0,49967	86
1,867 à 1,894				59,6	0,49993	26
1,894 à 1,921				65,4	0,49998	5
Plus de 1,921	»	»	»	71,2	0,50000	2
	100000					

Dans l'exemple précédent, la série des observations n'était pas continue. On avait groupé ensemble tous les individus tombant, pour la taille, au-dessous de 1m,570, comme aussi tous ceux qui s'élevaient au-dessus de 1m,759. Néanmoins les sept groupes intermédiaires ont été suffisants pour établir les rangs qu'ils devaient occuper dans notre table. La distance des groupes a été trouvée de 5,8 unités de notre échelle; et cette distance équivaut, pour les tailles, à 0m,027. Pour 21 rangs ou unités de l'échelle, on aurait 0m,098 ou un décimètre environ; par conséquent, l'écart probable serait un peu inférieur à un demi-décimètre. Si l'on observe que la taille moyenne est de 1m,62 environ, on reconnaîtra que l'écart probable forme 1/35 de la quantité à mesurer.

—

Lettre XXI, page 145.

« Le nombre des réformés pour défaut de taille est exagéré de beaucoup. Non-seulement nous en avons la preuve, mais nous pouvons déterminer le montant de la fraude. »

Si nous comparons les nombres observés aux nombres calculés précédemment, nous pourrons donner le tableau suivant :

TAILLES DES HOMMES.	NOMBRES D'HOMMES		DIFFÉRENCES des RÉSULTATS.
	MESURÉS.	CALCULÉS.	
Au-dessous de 1m,570	28620	26345	+ 2275
De 1m,570 à 1,597	11580	13182	— 1602
1,597 à 1,624	13990	14502	— 512
1,624 à 1,651	14410	13982	+ 428
1,651 à 1,678	11410	11803	— 393
1,678 à 1,705	8780	8725	+ 55
1,705 à 1,732	5530	5527	+ 3
1,732 à 1,759	3190	3187	+ 3
Au-dessus de 1,759	2490	2645	— 155

Si l'on a égard à la grandeur des nombres, il n'y a de différence remarquable entre les nombres calculés et observés, que pour les tailles les plus petites. Le calcul montre que 2275 hommes ont été réformés pour défaut de taille, qui semblaient ne pas devoir l'être, d'après la loi de continuité. Ce nombre se retrouve en déficit dans les deux catégories supérieures, qui sont trop faibles, l'une de 1602 hommes et l'autre de 512, ce qui donne en totalité 2114, nombre qui s'éloigne peu du précédent.

—

Lettre XXII, *p. s.*, page 153.

« J'ai pu mesurer les différentes dimensions du corps du célèbre nain que les États-Unis ont offert à l'admiration de l'Europe. »

Charles S. Stratton, surnommé le général Tom Pouce naquit, d'après la notice sur sa vie, à Bridge-Port, Connecticut, États-Unis, le 11 janvier 1832. Il était dans sa quatorzième année quand j'ai eu l'occasion de le voir.

D'après la même notice, le général, à l'époque de sa naissance, pesait 9 livres 1/2 ou 4 kilogrammes 313 grammes. Aucun accident ne précéda ni ne suivit sa naissance. On ne remarqua rien d'extraordinaire en lui jusqu'à ce qu'il eût atteint l'âge de sept mois. Il pesait alors 15 livres, poids anglais; et ce fut, vers ce temps, qu'on s'aperçut qu'il cessait de croître.

Ses parents sont de grandeur ordinaire, et ont eu deux autres enfants qui ne présentent aucune anomalie dans leur développement.

Je dois à l'obligeance de M. Clemson, chargé d'affaires des États-Unis à Bruxelles, d'avoir pu mesurer les principales dimensions du nain de Bridge-Port. Elles ont été prises avec le plus grand soin, et se trouvent consignées dans le tableau suivant. Je les ai rapprochées des dimensions avec lesquelles elles m'ont paru avoir le plus d'analogie dans les tables que j'ai construites pour les différents âges et que j'extrais d'un ouvrage *Sur les proportions de l'homme*, destiné à être publié sous peu.

Les proportions de Tom Pouce, le 9 juillet 1845, étaient à peu près celles d'un enfant de 1 à 3 ans, réduites de $\frac{11}{100}$ de leur valeur; ce qui peut correspondre aux dimensions d'un enfant ordinaire de 14 à 15 mois.

Mesures prises sur Ch. S. Stratton, surnommé le GÉNÉRAL TOM POUCE.

PARTIES DU CORPS.	MESURES D'APRÈS		
	TOM POUCE.	UN ENFANT DE 1 à 3 ans.	1 à 3 ans réduit de 0.11
La hauteur avec les bottes, dont la semelle avait une épaisseur de 1 centimètre	m 0,710	m 0,798.	m 0,710
Longueur des bras étendus	0,660	0,784	0,698
Hauteur de la tête	0,153	0,175	0,156
Circonférence de la tête par les sinus frontaux	0,442	0,492	0,438
Du sommet de la tête aux clavicules	0,175	0,189	0,168
Distance des épaules entre les apophyses acromions.	0,202	0,195	0,174
Circonférence aux épaules entre les apophyses acrom.	0,500	0,482	0,430
Id. aux hanches	0,478	0,502	0,447
Long. du bras, apophyses acrom. à l'extr. de la main.	0,245	0,319	0,284
Grandeur de la main	0,075	0,095	0,085
Id. du pied nu	0,105	0,124	0,111
Largeur de la main	0,044	0,047	0,043
Id. du pied	0,042	0,051	0,046
Hauteur de la jambe, du milieu de la rotule	0,175	0,193	0,173
Depuis la bifurcation jusqu'à terre	0,265	0,285	0,254
Depuis le trochanter jusqu'à terre	0,500	0,532	0,500
Circonférence du mollet	0,157	0,170	0,152
Grandeur de l'oreille	0,047	0,050	0,045

LETTRE XXIV, page 161.

« Ces divers groupes, Votre Altesse le sait déjà, ne seraient pas composés au hasard, de nombres plus ou moins grands, bien qu'ils proviennent de petites maladresses, de petites inexactitudes du coup d'œil. »

Je tâcherai de faire mieux comprendre comment les erreurs accidentelles finissent par s'entre-détruire, par la répétition des épreuves; j'admettrai que, parmi toutes les précautions que je puis prendre pour obtenir une grande exactitude, je suis nécessairement exposé à différentes causes d'erreur à la vérité purement accidentelles. Pour simplifier, je supposerai que ces causes ne sont qu'au nombre de dix, bien qu'on puisse généralement considérer leur nombre comme illimité; et je supposerai, de plus, que chacune d'elles donne lieu à une même erreur dans la mesure, à une erreur de cinq centièmes de millimètre, soit en plus, soit en moins.

Cela posé, les dix causes d'erreur auxquelles je suis exposé, peuvent concourir dans le même sens, soit pour donner une mesure trop grande, soit pour donner une mesure trop petite. Dans le premier cas, j'obtiendrai la mesure la plus grande possible; dans le second cas, la mesure la plus petite. Mais la probabilité que les dix causes d'erreur vont agir à la fois dans le même sens, sera très-faible, comme nous pourrons facilement nous en assurer.

Chacune des causes accidentelles, d'après la définition que j'en ai donnée, a la même probabilité pour agir soit dans l'un soit dans l'autre sens; cette probabilité est donc $\frac{1}{2}$. Mais la probabilité que les dix erreurs tomberont à la fois dans le même sens et seront ainsi toutes positives ou toutes négatives, appartient à un événement composé de dix événements simples. Il faut donc multiplier entre elles les dix fractions $\frac{1}{2}$ qui expriment les probabilités de ces dix événements simples, et et l'on aura $\frac{1}{1024}$.

Nous remarquerons que, par la nature même du calcul, chacune des deux plus grandes erreurs possibles n'offre qu'une seule chance en sa faveur sur un nombre total de 1024 chances. Les 1022 chances restantes appartiennent aux neuf autres événements possibles.

Dix de ces chances sont pour l'événement où neuf des dix causes agiraient positivement, et où la dixième produirait une erreur en sens contraire. Dans ce cas, les neuf premières causes feraient naître une erreur de + $0^{mm},45$, qui serait paralysée en partie par la seule cause d'erreur qui aurait agi en sens contraire et qui produirait une erreur de $0^{mm},05$. En tenant compte des dix causes d'erreur, on ne se trompera donc réellement que de $0^{mm},40$.

Cette erreur serait la même que celle que produiraient les dix causes accidentelles, en supposant qu'une seule agit positivement et les neuf autres négativement. Cet événement aurait aussi dix chances en sa faveur.

Pour s'expliquer ce qui précède, il faut concevoir que l'action de neuf causes dans un même sens et d'une seule dans un sens contraire, peut arriver de dix manières différentes, tandis que le concours des dix causes à la fois dans un même sens, ne peut se produire que d'une façon. En effet, chacune des dix causes, prise isolément, peut agir dans un sens déterminé, pendant que les neuf autres agissent dans un sens contraire; il y aura donc réellement dix espèces d'événements possibles, ou bien dix chances distinctes qui amèneront le même résultat, savoir: *une seule* erreur négative, de $0^{mm},05$, et *neuf fois* cette même erreur prise positivement.

Le nombre des chances possibles est plus grand encore, quand on suppose que deux des dix causes accidentelles agissent dans un sens déterminé, pendant que les huit autres agissent dans un sens opposé.

En général le nombre des chances est d'autant plus grand, que l'égalité tend plus à s'établir entre le mode d'action des causes, et l'événement le plus probable est celui où cinq des dix causes agissent dans un sens et les cinq autres dans le sens opposé.

Le tableau suivant fera mieux apprécier ce qui vient d'être dit. A côté de toutes les combinaisons possibles qu'on peut attribuer aux causes dans leur mode d'action, on trouvera les erreurs auxquelles ces causes donnent lieu, et le nombre des chances que chaque combinaison réunit en sa faveur.

LES DIX CAUSES ACCIDENTELLES peuvent amener						ERREUR TOTALE.	NOMBRE DES CHANCES.
10 fois l'erreur	+ 0,05 mm;		0 fois l'erreur	— 0,05 mm		+ 0,5 mm	1
9	id.	»	1	id.	»	+ 0,4	10
8	id.	»	2	id.	»	+ 0,3	45
7	id.	»	3	id.	»	+ 0,2	120
6	id.	»	4	id.	»	+ 0,1	210
5	id.	»	5	id.	»	0,0	252
4	id.	»	6	id.	»	— 0,1	210
3	id.	»	7	id.	»	— 0,2	120
2	id.	»	8	id.	»	— 0,3	45
1	id.	»	9	id.	»	— 0,4	10
0	id.	»	10	id.	»	— 0,5	1

LETTRE XXVI, page 178.

« Le tableau qui accompagne cette lettre pourra rendre ceci plus sensible. » (Voyez ci-après.)

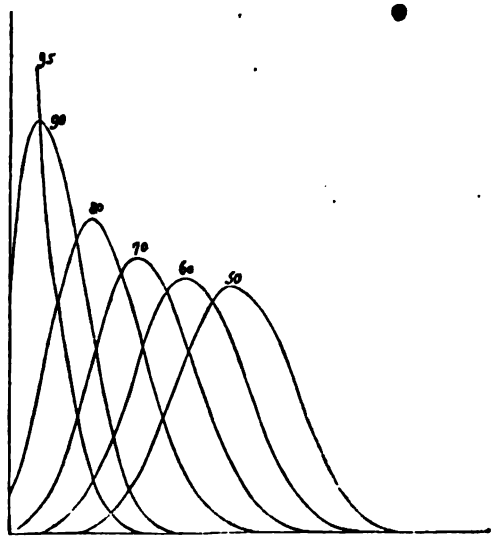


TABLEAU indiquant les probabilités des tirages de 16 boules à [illegible] noires, dans des rapports d[illegible]

NOMBRE de BOULES NOIRES tirées.	PAR 100 BOULES QUE CONTIENT L'URNE.				
	50.	55.	60.	65.	70
0	0,000 02	0,000 07	0,000 26	0,001 02	[illegible]
1	0,000 25	0,000 92	0,003 01	0,008 75	[illegible]
2	0,001 83	0,005 63	0,015 05	0,035 52	[illegible]
3	0,008 54	0,021 51	0,046 81	0,088 76	[illegible]
4	0,027 77	0,057 19	0,101 42	0,155 54	[illegible]
5	0,066 65	0,112 26	0,162 27	0,200 76	[illegible]
6	0,122 19	0,168 43	0,196 53	0,196 18	[illegible]
7	0,174 56	0,196 87	0,188 89	0,152 46	[illegible]
8	0,196 38	0,181 21	0,141 66	0,092 36	[illegible]
9	0,174 56	0,131 80	0,083 95	0,044 20	[illegible]
10	0,122 19	0,075 48	0,039 18	0,010 66	[illegible]
11	0,066 65	0,033 60	0,014 25	0,004 89	[illegible]
12	0,027 77	0,011 48	0,003 96	0,001 10	[illegible]
13	0,008 54	0,002 89	0,000 81	0,000 18	[illegible]
14	0,001 83	0,000 51	0,000 12	0,000 02	[illegible]
15	0,000 25	0,000 06	0,000 01	0,000 00	[illegible]
16	0,000 02	0,000 00	0,000 00	0,000 00	[illegible]

s une urne contenant un nombre infini de boules blanches et de boules
ITRE XXVI, page 178.)

NBRE DE BOULES BLANCHES EST					NOMBRE de BOULES NOIRES tirées.
75.	80.	85.	90.	95.	
0,010 02	0,028 15	0,074 92	0,185 20	0,440 11	0
0,053 45	0,112 59	0,202 52	0,329 43	0,370 63	1
0,133 63	0,211 10	0,279 98	0,274 52	0,146 31	2
0,207 88	0,246 30	0,250 57	0,142 35	0,035 94	3
0,225 21	0,200 11	0,132 24	0,051 40	0,006 15	4
0,180 16	0,120 07	0,056 01	0,013 71	0,000 78	5
0,110 09	0,055 05	0,018 12	0,002 79	0,000 07	6
0,052 43	0,019 65	0,004 57	0,000 44	0,000 01	7
0,019 66	0,005 53	0,000 91	0,000 06	0,000 00	8
0,005 83	0,001 23	0,000 14	0,000 01	0,000 00	9
0,001 36	0,000 21	0,000 02	0,000 00	0,000 00	10
0,000 25	0,000 03	0,000 00	0,000 00	0,000 00	11
0,000 03	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	12
0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	13
0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	14
0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	15
0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	16

Variation diurne de la tempé

Amplitude de l'oscillation moyenne du thermomètre.	JANVIER.		FÉVRIER.		MARS.		AVRIL.		MAI.		JUIN
	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	[illegible]
0° à 1°	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0
1 à 2	8	0,026	1	0,003	1	0,003	1	0,003	0	0,000	1
2 à 3	31	0,100	10	0,035	7	0,023	2	0,007	0	0,000	2
3 à 4	61	0,197	27	0,096	27	0,087	5	0,017	3	0,010	0
4 à 5	68	0,220	67	0,238	37	0,120	15	0,050	2	0,006	[illegible]
5 à 6	50	0,162	69	0,245	38	0,123	26	0,087	12	0,039	0
6 à 7	32	0,104	46	0,163	59	0,191	39	0,130	20	0,065	[illegible]
7 à 8	22	0,071	35	0,124	52	0,168	51	0,170	23	0,075	[illegible]
8 à 9	20	0,065	9	0,032	44	0,142	40	0,133	43	0,139	[illegible]
9 à 10	8	0,026	10	0,035	19	0,061	38	0,127	43	0,139	[illegible]
10 à 11	4	0,013	6	0,021	17	0,055	27	0,090	46	0,148	[illegible]
11 à 12	3	0,010	2	0,007	6	0,019	21	0,070	49	0,158	[illegible]
12 à 13	1	0,003	0	0,000	2	0,006	9	0,030	29	0,094	[illegible]
13 à 14	1	0,003	0	0,000	0	0,000	8	0,027	21	0,068	[illegible]
14 à 15	0	0,000	0	0,000	0	0,000	3	0,010	14	0,045	[illegible]
15 à 16	0	0,000	0	0,000	0	0,000	4	0,013	2	0,006	[illegible]
16 à 17	0	0,000	0	0,000	0	0,000	1	0,003	1	0,003	[illegible]
17 à 18									2	0,006	[illegible]
18 à 19											[illegible]
Totaux.	309		282		300		300		310		[illegible]

TITRE XXVI, page 182.)

...ILLET.		AOÛT.		SEPTEMBRE.		OCTOBRE.		NOVEMBRE.		DÉCEMBRE.	
...re ...ne	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations	Réduct. à l'unité.	Nombre de variations.	Réduction à l'unité.	Nombre de variations.	Réduction à l'unité.	Nombre de variations.	Réduction à l'unité.	Nombre de variations.	Réduction à l'unité.
	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000
	0,000	0	0,000	0	0,000	1	0,003	9	0,030	11	0,036
	0,000	1	0,003	0	0,000	9	0,029	16	0,053	34	0,110
	0,003	0	0,000	3	0,010	15	0,048	40	0,134	55	0,178
	0,023	2	0,006	12	0,040	47	0,152	62	0,207	67	0,217
	0,032	8	0,026	27	0,090	56	0,181	61	0,204	65	0,210
	0,078	22	0,072	42	0,140	55	0,178	48	0,160	32	0,104
	0,110	37	0,119	51	0,170	34	0,110	31	0,104	27	0,087
	0,133	50	0,161	59	0,197	36	0,116	20	0,067	12	0,039
	0,136	47	0,151	42	0,140	23	0,074	4	0,013	4	0,013
	0,133	50	0,161	27	0,090	17	0,055	7	0,023	1	0,003
	0,123	37	0,119	18	0,060	7	0,023	1	0,003	0	0,000
	0,084	25	0,082	11	0,037	8	0,026	0	0,000	1	0,003
	0,061	16	0,052	5	0,017	1	0,003	0	0,000	0	0,000
	0,053	9	0,029	2	0,007	0	0,000	0	0,000	0	0,000
	0,019	5	0,016	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000
	0,010	1	0,003	1	0,003	0	0,000	0	0,000	0	0,000
	0,003										
		310		300		300		299		309	

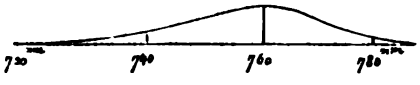
Lettre XXVI.

Pour compléter, autant que possible, la théorie des moyennes, je donne ci-après trois lettres que m'a fait l'amitié de m'adresser M. Bravais, professeur à l'école polytechnique de Paris, au sujet du mémoire *sur l'appréciation des documents statistiques et en particulier sur l'appréciation des moyennes*, que j'avais inséré dans le t. II du *Bulletin de la commission centrale de statistique de Belgique*. Dans ce mémoire, je n'avais eu en vue que l'examen du cas où les causes accidentelles n'ont pas de tendance à agir dans un sens plutôt que dans un autre. Peut-être n'avais-je pas suffisamment expliqué l'objet de cet écrit; je le regrette d'autant moins aujourd'hui, qu'il a donné lieu à des lettres très-intéressantes de la part d'un savant qui s'est occupé avec un grand succès de la théorie des probabilités et de ses applications aux sciences d'observation. Je ne reproduis pas ici les lettres auxquelles M. Bravais fait allusion, parce que je ne ferais que répéter en partie ce que contiennent plusieurs lettres imprimées dans cet ouvrage.

Paris le 17 janvier 1845.

« J'ai lu avec beaucoup d'intérêt vos recherches statistiques; vous y rendez très-sensible pour tout le monde la nature de la loi de possibilité des diverses sortes de résultats que peut amener une série prolongée de tirages. Cette loi de possibilité a pour limite e^{-hx^2}, lorsque les nombres de tirages deviennent très-grands. Mais doit-on admettre que, dans la nature, la courbe de possibilité des écarts x plus ou moins grands d'une quantité *physique*, autour de sa moyenne, soit toujours et *nécessairement* une fonction de ce genre? C'est ce que je ne pense pas qu'on puisse admettre *à priori*, quoique l'observation *à posteriori* justifie le plus souvent cette vue de l'esprit. Par exemple, pour la taille, ne pourrait-on pas concevoir qu'il existe des causes spéciales qui portent un certain nombre de tailles humaines de préférence vers $1^m,700$, tandis que d'autres causes portent d'autres tailles vers $1^m,600$, de manière à ce que la courbe des possibilités offrît deux *maxima*, l'un vers $1^m,600$, l'autre vers $1^m,700$? La possibilité *maximum* correspond-elle toujours à la moyenne? Les deux branches de la courbe sont-elles toujours

symétriques? Il me semble que l'on pourrait citer bien des exemples où cela n'est pas. En voici un seul. On sait que les plus grands écarts du baromètre vers le haut de la colonne, ne sont guère que la moitié ou les 2/3 des écarts du baromètre vers le bas; de sorte que l'on aura une courbe de possibilité de la forme



dont les deux moitiés ne seront pas symétriques; seulement l'ordonnée moyenne doit toujours partager le segment total en deux aires égales. Ne pourrait-on pas concevoir *à priori* que, dans la taille humaine, il se passe quelque chose d'analogue à ce qui se présente (passez-moi le mot) dans la taille de la colonne barométrique?

Je me borne à vous signaler mes scrupules, etc. »

—

Paris le 27 janvier 1845.

« Je suis vraiment presque honteux qu'une simple remarque que m'avait suggérée la lecture de vos *Recherches statistiques*, vous ait inspiré autant d'intérêt, et vous ait engagé à me demander, d'une manière aussi flatteuse pour moi, ce que je pense des courbes de possibilité en général. Et d'abord, permettez-moi de vous dire qu'ayant relu avec plus de soin la page 67 de votre travail, j'y vois clairement que vous n'êtes aucunement tombé dans la faute que j'avais cru pouvoir me permettre de vous indiquer, puisque vous dites, *article* 1 : « Dans le second cas, il n'existe entre les résultats aucune loi de continuité nécessaire. »

» Quant à la première partie de votre proposition, je suis à me demander si elle n'est pas encore énoncée d'une manière trop générale, et si elle n'a pas besoin, pour être vraie, de subir des restrictions importantes.

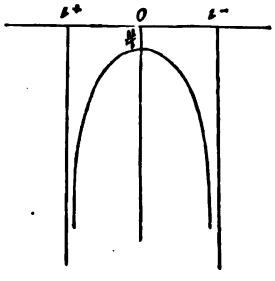
» Ainsi, et en premier lieu, il me semble que si la quantité à mesurer (bien entendu, correspondante à un concret réellement existant) est susceptible de varier en vertu de causes inconnues, la possibilité ne devra pas toujours suivre la même loi. Je prendrai avec vous, comme exemple, l'étoile polaire; seulement je prendrai un exemple un peu plus simple que le vôtre, et je supposerai qu'il s'agisse d'obtenir la *hauteur vraie* de cette étoile, à son passage au méridien inférieur ou supérieur, élément d'où dépend la déclinaison de l'étoile, la latitude étant connue. Pour simplifier encore, je supposerai qu'on ait tenu compte de la précession, de l'aberration et de la nutation. Mettons de côté les causes d'erreur qui peuvent provenir d'une inexacte application de ces corrections; il reste encore plusieurs autres causes d'erreur qui pèsent sur chaque détermination isolée *. La parallaxe de déclinaison d'abord : (supposons-la de 1″). Si la hauteur obtenue est 45° 30′, on voit que, par cette cause seule, la hauteur observée pourra varier entre 45° 29′ 59″ et 45° 30′ 1″; mais il est de plus facile de voir que les hauteurs seront *plus souvent* observées près de ces deux extrêmes que près de la valeur médiane. En effet, l'équation de la parallaxe sera de la forme de $a \sin(\alpha + b)$, α étant la longitude du soleil, a et b deux constantes; soit pour simplifier $a = 1$, $b = o$; l'équation se réduit à $\sin \alpha$, quantité susceptible de toutes sortes de valeurs entre $+1$ et -1. En nommant e l'erreur correspondante à α, $e + de$ celle correspondante à $\alpha + d\alpha$, on aura $e = \sin \alpha$, $de = \cos \alpha d\alpha$. Soit P la possibilité que l'erreur tombe entre o et e, et que la longitude du soleil tombe entre o et α, on aura $P = \varphi(e)$, φ étant une fonction inconnue. On aura ensuite

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{de} \frac{de}{d\alpha}.$$

Or, on a évidemment

$$P = 2\frac{\alpha}{2\pi}, \quad \text{donc} \quad \frac{d\varphi}{de} = \frac{1}{\pi \cos \alpha} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-e^2}}.$$

* La parallaxe de déclinaison, l'excentricité dans le cercle répétiteur, la réfraction, etc., ne seraient pas des erreurs accidentelles, mais devraient être traitées comme des erreurs constantes ou variables, comme M. Bravais a bien voulu le reconnaître lui-même dans la lettre suivante. (A. Q.)



» On voit que la courbe des possibilités des erreurs e est

$$p = \frac{1}{\pi\sqrt{1-e^2}},$$

en appelant p le coefficient différentiel de P, c'est-à-dire la possibilité de l'erreur e. La courbe a la forme (ci-dessus) d'une sorte de parabole contenue entre les deux asymptotes $e = 1$, $e = -1$. D'ailleurs si on intègre

$$\int \frac{1}{\pi\sqrt{1-e^2}}\,de, \quad \text{de} -1 \text{ à } +1,$$

on retrouve 1 pour l'intégrale, ce qui est conforme à ce que l'on doit obtenir *à priori*. Dans ce cas, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est finie quoique les ordonnées soient infinies pour $e = \pm 1$.

» Voilà donc une première cause qui tend à faire dévier la courbe générale des possibilités de la forme exponentielle normale e^{-hx^2}, et à lui donner deux *maxima* correspondants aux deux plus grandes digressions parallactiques de l'étoile.

» Je supposerai maintenant que l'on se soit servi d'un cercle répétiteur, dans lequel l'erreur d'excentricité $\frac{\varepsilon}{R}$, ε étant l'excentricité et R le rayon du cercle, ne soit pas convenablement éliminée; l'erreur d'excentricité sera, sur chaque lecture l, de la forme $\frac{\varepsilon}{R}\sin(l + a)$, a étant une constante. Comme il y a deux lectures l, l', dont la différence est la double distance zénitale, soit 2Z, l'erreur définitive est

$$\frac{\varepsilon}{R}\sin(l'+a)-\frac{\varepsilon}{R}\sin(l+a)=\frac{2\varepsilon}{R}\sin Z\sin[l+(z+a)].$$

Or, comme Z, a, ε, R sont constantes et que l peut avoir toutes les valeurs possibles de 0° à 360°, on voit que l'on retombe dans le cas précédent, sauf la valeur des deux constantes, qui sera généralement différente.

» Considérons maintenant les erreurs de réfractions. On suppose la réfraction dans son état moyen qui correspond à une valeur 0,08 du coefficient de la réfraction terrestre. Or, connaissons-nous la loi des écarts de ce coefficient en dessus et en dessous de cette valeur moyenne? Cette loi dépend des variations du décroissement de densité dans les couches inférieures de l'atmosphère. Ces variations ne peuvent-elles pas être telles que la loi de possibilité des valeurs de ce coefficient autour de la moyenne 0,08 soit différente de la loi générale e^{-hx^2}? C'est ce qui arrive entre autres pour la pression de l'air considérée dans ses variations autour de sa moyenne (760^{mm} environ au niveau de la mer). Y aurait-il une cause pour que les variations du décroissement de densité des couches soient *à priori* plus régulières et plus symétriques que celles de la pression barométrique? Je ne crois pas que l'on puisse l'affirmer. Dans les deux cas, il y a oscillation autour d'une certaine position d'équilibre.

» Quant aux erreurs de graduation du cercle, erreurs que l'on doit supposer variables si le cercle est répétiteur (je me borne à considérer ce cas, parce que, dans le cercle non-répétiteur, ces erreurs sont des erreurs constantes dont nous n'avons pas à nous occuper ici), au lieu d'avoir pour l'erreur

$$e=\sin\alpha,\quad\text{ou}\quad e=\frac{2\varepsilon}{R}\sin Z\cos(l+Z+a),$$

on a dans ce cas $e=f(l)$, la fonction f étant quelconque, par conséquent inassignable *à priori;* toutes les lectures l étant également possibles de o à 2π; la loi de possibilité sera de la forme $\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{dl}{de}$.

» L'erreur de lecture suit des lois très-différentes; elle est très-faible lorsque la division du vernier est précisément en face de celle du limbe;

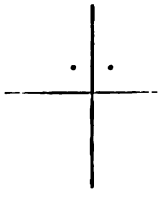
elle est plus forte lorsqu'aucune division du vernier n'est en face de celles du limbe; elle dépend du reste que laisse la division de la lecture l divisée par l'arc que le vernier permet d'apprécier.

» L'erreur de parallaxe dans la lecture, ainsi que l'erreur de coïncidence de l'étoile sous le fil, proviennent de causes encore plus difficiles à analyser.

» C'est la réunion de toutes ces causes qui donne naissance à l'erreur définitive, et par suite à la loi de possibilité que l'observation fait découvrir *à posteriori*.

» Il en serait à peu près de même dans la mesure de la taille d'un homme isolé, faite à diverses reprises. La taille s'allonge par le repos et se raccourcit par la fatigue; les variations vont au moins à 1 centimètre; mais l'état moyen se présente-t-il le plus fréquemment de tous? c'est ce dont il est permis de douter.

» L'équerre mobile qui sert à la mesure peut n'être pas horizontale. Si les faces antérieure et postérieure du couloir vertical (qui permet à l'équerre mobile de glisser de haut en bas et de bas en haut) ne sont pas bien parallèles entre elles, on aura deux inclinaisons différentes selon celle de ces deux faces qui appuiera sur la face correspondante du pilier immobile qui sert à la mesure; de sorte qu'il pourra en résulter ou une correction égale à $+c$, ou une correction égale à $-c$. La courbe de possibilité se réduit à deux points symétriquement placés par rapport à l'axe des ordonnées de cette courbe.



» Reste maintenant le cas d'une quantité parfaitement invariable dans la nature. Je crois que, dans ce cas même, la courbe des erreurs possibles pourra être très-variable, quoique ces erreurs, dans ce cas, proviennent toutes de l'observation. Mais nos instruments, et aussi nos sens, portent en eux des causes d'erreur. Ainsi, dans le cas très-simple d'une longueur que l'on mesure en portant un compas alternati-

vement sur la longueur à mesurer et sur un étalon, il y a une variation de pression de la main sur les branches, qui peut tantôt augmenter, tantôt diminuer le résultat obtenu; mais l'événement correspondant à une variation de pression de la main capable de produire l'erreur o à $\frac{1}{100}$ de millimètre, est-il plus probable que l'événement capable de produire l'erreur $\frac{3}{100}$ à $\frac{4}{100}$ de millimètre? Je ne pense pas que nous puissions l'affirmer *à priori*.

En résumé, je pense que, dans le cas le plus général, toute cause partielle et distincte d'erreur donne lieu à une courbe de possibilité des erreurs (ou si l'on aime mieux, des écarts autour de la moyenne), laquelle peut avoir une forme quelconque, courbe que nous pouvons être puissants ou impuissants à découvrir, et qui, dans le premier cas, peut se déterminer soit par des considérations *à priori*, sur la nature propre de cette cause, soit *à posteriori*, par l'observation, à la condition de l'isoler des autres causes d'erreurs concomitantes.

» Je vais essayer maintenant de rétablir *en partie* ce que je viens de défaire, et de faire reparaître la courbe ordinaire $e^{-h^2 e^2}$ suivant laquelle semblent si souvent se coordonner les écarts observés autour du résultat moyen. Je crois que trois causes principales y contribuent.

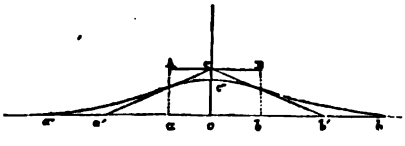
» 1° La courbe de possibilité des erreurs dont reste passible un *résultat moyen* se rapproche toujours beaucoup de la forme $e^{-h^2 e^2}$, et la courbe converge vers cette forme, à mesure que le nombre des résultats partiels concourant à la formation de la moyenne, augmente lui-même. C'est en cela, si je ne me trompe, que consiste la loi des grands nombres. Je vais citer deux exemples de cette convergence. Reprenons le cas cité ci-dessus, où la courbe de possibilité de l'erreur se réduit à deux points, l'erreur étant nécessairement égale à $+i$ ou à $-i$. Supposons que l'on répète la mesure, et voyons de quelle erreur sera susceptible la somme des deux mesures : on aura quatre combinaisons qui correspondront à $e = +2i, o, o, -2i$. Si l'on a trois mesures, on aura huit combinaisons que j'indique par $+ + +$, $+ + -$, $+ - +$, $+ - -$, $- + +$, $- + -$, $- - +$, $- - -$. On aura les quatre valeurs possibles $e = +3i, = +i, = -i, = -3i$, avec les probabilités $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Dans le cas général de m mesures, on aura les erreurs possibles

$$+mi, \quad +(m-2)i \ldots\ldots -(m-2)i, -mi$$

avec les probabilités

$$\frac{1}{2^m},\quad m\,\frac{1}{2^m},\quad \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{2^m}\ \ldots\ldots -m\,\frac{1}{2^m},\quad -\frac{1}{2^m}.$$

» On rentre alors dans le cas que vous avez si bien discuté dans votre mémoire; la courbe des possibilités est discontinue, et correspond à une série de points isolés, équidistants dans le sens des abscisses, et dont les ordonnées sont proportionnelles aux termes du développement du binôme $(1+1)^m = 1 +$ etc. . . . . La courbe continue qui relie ces points entre eux, converge, comme vous le démontrez très-bien, vers la forme e^{-Ax^2}.



» Le second exemple est celui où la courbe des possibilités est une droite AB, droite finie parallèle à l'axe des abscisses et coupée en deux parties égales, en C, par l'une des ordonnées, de sorte que l'on ait la possibilité $p =$ constante, entre deux limites $\pm i$, et nulle hors de ces limites. Sur la figure, on a $AC = CB = i$. Co doit être égal à $\frac{1}{2i}$, pour que la surface du rectangle $aAB b$ soit égale à 1. Ce cas se présente lorsqu'on prend un nombre dans une table, par exemple, un logarithme dans une table de logarithmes; ainsi, si en cherchant log. 2, nous trouvons 0,30103; nous pouvons seulement affirmer que log. 2 est compris entre 0,301025 et 0,301035, toutes les valeurs intermédiaires étant *également* possibles. Si nous faisons la somme de deux logarithmes, quelle sera la courbe des possibilités des erreurs dont cette somme est passible? On trouve que cette courbe est alors représentée par la droite brisée $a'Cb'$, $a'o$ étant égal à $-2i$ et $b'o$ à $+2i$. Pour la somme de trois logarithmes, on a un système de trois paraboles; l'une allant de a'' jusqu'au point de rencontre de la ligne Aa et ayant pour

équation

$$p = \frac{1}{6i} \cdot \frac{27}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{6i}\right)^2;$$

l'autre, allant de la ligne Aa à la ligne Bb et dont l'équation est

$$p = \frac{1}{6i}\left[\frac{9}{4} - 27\left(\frac{e}{6i}\right)^2\right]\ldots;$$

la troisième, enfin, semblable à la première, qui vient se terminer en b'' à une distance $ob'' = oa'' = 3i$, et a pour équation

$$p = \frac{1}{6i} \cdot \frac{27}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{6i}\right)^2.$$

Pour quatre logarithmes, la courbe se composerait de 4 paraboles du 3me degré, et commencerait à rappeler beaucoup, pour sa forme, celle de la courbe $e^{-h^2e^2}$. Ainsi, en la comparant à l'exponentielle correspondante et douée de la même ordonnée *maximum*, les probabilités correspondantes à $e = o$, $= \pm 2i$, $= \pm 4i$ seront, pour la courbe exponentielle,

$$\frac{1}{8i}\,2{,}6667\,;\quad \frac{1}{8i}\,0{,}6573\,;\quad \frac{1}{8i}\,0{,}0098\,;$$

et, pour la courbe à quatre paraboles,

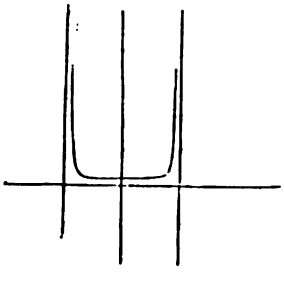
$$\frac{1}{8i}\,2{,}6667\,;\quad \frac{1}{8i}\,0{,}6667\,;\qquad 0{,}0000.$$

» La différence entre les deux courbes de possibilité est déjà de peu d'importance.

» Si, au lieu des sommes de m termes, nous considérons maintenant les moyennes des mêmes m termes, il est visible que la loi de possibilité des erreurs serait la même, en remplaçant dans les résul-

tats précédents l'erreur e sur les sommes, par la fraction $\frac{e}{m}$ qui est l'erreur correspondante sur les moyennes.

» Il existe dans la Théorie des probabilités de Laplace, vers les pages 260 à 265 de cet ouvrage, une méthode générale pour obtenir la loi de possibilité des erreurs d'une somme de nombres, lorsque l'erreur sur chaque nombre isolé a une loi de possibilité connue, qui peut être la même pour tous ces nombres, ou variable d'un nombre à l'autre. Je n'ai pas en ce moment cet ouvrage sous les yeux, ni ceux de MM. Poisson et Cournot.



» Mais dans tous les cas, à mesure que la somme augmentera, la courbe tendra à se rapprocher de la forme e^{-hx^2}. On voit que le cas le plus défavorable à une convergence rapide est celui où la courbe est renfermée entre deux asymptotes verticales; mais ce cas poussé à l'extrême nous mène à une courbe représentée par deux verticales, ou, ce qui revient au même, représentée par deux points situés à droite et à gauche de l'axe des ordonnées. Ainsi ce cas, qui est un cas déjà examiné, est précisément celui où la convergence est la moins rapide. Donc la courbe des possibilités de l'erreur commise sur une moyenne convergera toujours vers la forme e^{-hx^2} à mesure que le nombre des tirages augmentera, et cela, avec une convergence supérieure à celle de la série

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{2}\ \ldots\ldots\ \frac{m(m-1)}{2},\ m,\ 1.$$

vers la forme e^{-hx^2}.

» Ainsi voilà une première cause qui tend à ramener souvent dans l'observation la courbe de possibilité e^{-hx^2}; c'est la formation des sommes ou des moyennes.

» 2° Dans le cas même où l'on considère un résultat isolé, un nombre provenant d'une observation unique, la forme e^{-hx^2} tend encore à se présenter, à cause de la multiplicité des *causes* d'erreur *de diverse nature* qui interviennent; l'erreur totale E est réellement la somme $e + e' + e'' + e''' \ldots$ d'une multitude d'erreurs différentes, qui se compensent en partie et auxquelles correspondent des courbes de possibilité $\varphi(e)$, $\psi(e')$, $\chi(e'')$..... etc., lesquelles tendent à donner une courbe de possibilité $\phi(E)$ des erreurs E, d'autant moins différente de la forme e^{-hx^2}, que les courbes de possibilité des erreurs partielles seront plus nombreuses et moins dissemblables entre elles. Le cas où toutes les courbes seraient les mêmes, rentre dans le cas examiné ci-dessus : à mesure que l'énergie de ces causes devient au contraire de plus en plus dissemblable, la forme de la fonction correspondante à la cause la plus énergique tend à prédominer dans la forme de $\phi(E)$.

» 3° Enfin, je crois que, dans la nature, les courbes de probabilités des écarts sont le plus souvent concaves vers l'axe des abscisses, ce qui revient à dire qu'ordinairement les plus grands écarts sont les plus rares; cela est surtout, je crois, vrai pour les erreurs d'observation. Il semble *à priori* que cela doit être ainsi, et ce que nous savons du groupement des erreurs ou des écarts dans le cas où ce groupement a été effectivement observé, ne dément pas cette supposition.

» La question de la possibilité des erreurs est extrêmement importante dans les sciences d'observations, telles que l'astronomie, la géodésie, etc. Je ne pense pas qu'elle ait été traitée jusqu'ici *ex professo* dans un ouvrage spécial avec la clarté désirable et les développements nécessaires. Il me semble me rappeler que M. Hagen a essayé de démontrer que, dans la mesure d'une grandeur naturelle invariable, la possibilité de l'erreur suivait l'exponentielle e^{-hx^2}; mais je crois aussi me rappeler que cette démonstration ne m'avait pas paru suffisamment rigoureuse. Dans certains cas, par exemple, dans l'astronomie et la géodésie de précision, chaque résultat est toujours déduit d'un assez grand nombre de mesures, et rentrant dans la classe des moyennes, son erreur probable doit suivre la loi e^{-hx^2}.

» C'est ce cas spécial que j'ai traité dans un mémoire communiqué,

en 1837, à l'académie de Paris; ce mémoire étant actuellement imprimé, je pourrai vous en adresser prochainement un exemplaire.

» J'ai assez souvent dirigé mes réflexions sur ce sujet; mais je n'ai jamais eu le temps de rien mettre au net; aussi j'ai saisi avec plaisir l'occasion de vous soumettre quelques-unes de mes idées, cette lettre m'imposant l'obligation de leur donner un corps qui, jusqu'ici, leur manquait. Je ne sais si j'aurai été constamment clair dans l'exposition qui précède ; ce serait un plaisir pour moi d'entrer dans tous les développements ultérieurs que vous pourriez désirer.

» Pardonnez-moi cette longue lettre, en raison de l'intérêt que vous prenez à ces questions. Lorsque vous me ferez l'honneur de m'écrire, veuillez me dire si vous êtes de mon avis, ou en quoi vous en différez. Il y a là une utilité pratique plus grande qu'on ne le pense communément; c'est en m'occupant d'un problème tout pratique dont voici l'énoncé : « A quelle distance de la côte doit se tenir un navire qui se propose de lever, sous voiles, le plan de cette côte? » (Eh bien, cette distance dépend de la loi de possibilité des erreurs des instruments, etc.) C'est, dis-je, en m'occupant de cette question, que j'ai été conduit à m'occuper des probabilités dans les sciences naturelles.

» Veuillez, etc. »

Paris le 15 février 1845.

« Je suis bien loin de regretter la publication de votre mémoire, qui renferme de si excellentes choses, et qui a, considéré au seul point de vue théorique, l'avantage de faire toucher au doigt bien des choses qui devraient, si c'était possible, entrer dans l'éducation de tout homme s'occupant, à quelque titre que ce soit, de l'étude de la nature : en France nous ignorons trop ces principes; nous avons eu dernièrement ici un essai de l'application des grands nombres à la statistique médicale; la plupart des médecins ont jeté les hauts cris, en partie sans doute par suite d'une crainte vague et instinctive du danger des généralisations, et par sentiment du besoin de flexibilité de la thérapeutique suivant l'organisation spéciale du malade; mais aussi en grande partie à cause de la difficulté de comprendre les lois des moyennes, et parce que le sujet n'a point été exposé avec la clarté désirable. J'aurais désiré seulement que, dans votre mémoire, les restrictions que vous

avez faites, et que vous avez si bien développées dans vos deux lettres, fussent mises un peu plus en évidence : je serais loin d'avoir été compris, si vous aviez pu croire que mes remarques allaient au delà.

» Je souscris d'avance à la distinction à faire des causes variables et des causes accidentelles; mais j'avoue que cette distinction me paraît difficile à bien établir, de manière à ce que la cause accidentelle, attentivement examinée, ne passe pas en tout ou en partie au rang des causes variables. Ce que vous dites des causes que l'on peut regarder comme constantes pendant assez longtemps, et qui varient ensuite, me paraît fort juste; elles sont les analogues des équations séculaires de l'astronomie; elles sont ordinairement les plus difficiles à démêler, et jettent souvent leur incertitude sur les résultats finaux.

» Lorsqu'on détermine l'erreur à craindre d'un résultat, on peut se demander deux choses : ou bien de déterminer une limite inférieure de cette erreur, ou une limite supérieure. Si, prenant le premier de ces deux points de vue, on conclut seulement de ses calculs que le degré de précision dont on peut répondre, est *au plus* égal au degré de précision qu'assigne le calcul, je crois que le physicien est tout à fait dans son droit, et qu'il est inattaquable sur ce terrain. Dans le cas contraire, où l'on croit pouvoir poser une limite supérieure à l'erreur possible, il faut le faire, je crois, avec beaucoup de prudence, attendu que l'on a à redouter contre une affirmation trop absolue, et les erreurs constantes encore inconnues, et toutes ces erreurs variables à longue période dont vous parliez ci-dessus. Mais poser une limite inférieure, c'est déjà quelque chose : si on eût pris dès longtemps ce parti, bien des résultats n'eussent pas été admis trop complaisamment pour être bannis plus tard. Par exemple la diminution de l'intensité magnétique horizontale avec la hauteur ne me paraît pas encore pouvoir être admise comme un fait démontré, quoique l'on commence déjà à ne plus oser la révoquer en doute. »

Lettre XXIX, p. 204.

« L'idée de combler cette lacune dans la science, m'a fait sentir depuis longtemps la nécessité d'établir une énumération aussi complète que possible de tous les phénomènes périodiques. J'ai cru qu'il serait utile de la soumettre aux savants. »

C'est ce que j'ai fait dans plusieurs circonstances importantes, et particulièrement à la 11e réunion de l'association britannique des savants anglais, réunis à Plymouth au mois de juillet 1841. Le tableau suivant des principaux phénomènes à observer, a été inséré dans le volume de cette session.

MÉTÉOROLOGIE.

Pression de l'air pendant les différents mois.	Force et directions des vents.
Température » » » »	Quantité de pluie, de neige, etc
Humidité » » » »	État du ciel.
Électricité » » » »	Météores (étoil. filant., aurores boréales, etc.)

PHYSIQUE.

Magnétisme de la terre.	Rayonnement de la chaleur.
Température de la terre à différentes profondeurs.	Températures des végétaux et des animaux
	Phénomène des marées.
Températ. des sources, des fleuves, de la mer.	Tremblements de terre.

CHIMIE.

Analyse de l'air.	Analyse des eaux pluviales.

BOTANIQUE.

Feuillaison des plantes et des arbres.	Fructification des plantes et des arbres.
Floraison » »	Effeuillaison » »

AGRICULTURE.

Époques des travaux de la terre.	Époques des récoltes
» de la maturité des végétaux.	» des vendanges
» de la fenaison.	

ZOOLOGIE.

Arrivée, passage et départ des oiseaux voyageurs	Phénomènes entomologiques
» » » des poissons »	Reproduction des animaux
Apparitions des divers papillons	Mortalité »

L'HOMME.

Fécondations, accouchements.	Crimes
Mariages	Consommations en viandes et approvisionnements
Naissances et leur nombre [illegible]	Mouvement des prix
Mutations et leur nombre	» des grains
Aliénations mentales	» des vins

LETTRE XXIX, page 206.

« A l'étude des phénomènes périodiques de l'atmosphère se joignit celle des phénomènes périodiques relatifs aux plantes, aux animaux et à l'homme. »

L'introduction aux *Instructions pour l'observation des phénomènes périodiques*, que j'ai publiées sous les auspices de l'académie de Bruxelles, pourra donner une idée du plan qui a été suivi jusqu'à présent. La voici :

« Pendant que la terre parcourt son orbite annuelle, il se développe à sa surface une série de phénomènes que le retour périodique des saisons ramène régulièrement dans le même ordre. Ces phénomènes, pris individuellement, ont occupé les observateurs de tous les temps; mais on a généralement négligé de les étudier dans leur ensemble, et de chercher à saisir les lois de dépendance et de corrélation qui existent entre eux. Les phases de l'existence du moindre puceron, du plus chétif insecte sont liées aux phases de l'existence de la plante qui le nourrit; cette plante elle-même, dans son développement successif, est en quelque sorte le produit de toutes les modifications antérieures du sol et de l'atmosphère. Ce serait une étude bien intéressante que celle qui embrasserait à la fois tous les phénomènes périodiques, soit *diurnes*, soit *annuels;* elle formerait à elle seule une science aussi étendue qu'instructive.

» C'est surtout par la *simultanéité* d'observations faites sur un grand nombre de points, que ces recherches peuvent prendre un haut degré d'importance. Une seule plante étudiée avec soin, nous présenterait déjà les renseignements les plus intéressants. On pourrait tracer à la surface du globe les lignes *synchroniques* pour sa feuillaison, sa floraison, sa fructification, etc. Le lilas, par exemple, *Syringa vulgaris*, fleurit dans les environs de Bruxelles, le 28 avril : l'on peut concevoir à la surface de la terre une ligne sur laquelle la floraison de cet arbuste se fait à la même époque, comme aussi des lignes pour lesquelles la floraison est avancée ou retardée de dix, vingt ou trente jours. Ces lignes alors seront-elles équidistantes? auront-elles des analogies avec les lignes isothermes? quelles seront les dépendances qui existeront entre elles? d'une autre part, les lignes *isanthésiques* ou de floraison simultanée, auront-elles un parallélisme avec les lignes relatives à la

feuillaison, ou à d'autres phases bien prononcées dans le développement de l'individu? On conçoit, par exemple, que pendant que le lilas commence à fleurir à Bruxelles, le 28 avril, il existe encore une série de lieux vers le nord où cet arbuste pousse seulement ses feuilles; or la ligne qui passe par ces lieux a-t-elle des rapports avec la ligne *isanthésique* qui correspond à la même époque? On peut se demander encore si les lieux pour lesquels la feuillaison arrive le même jour, auront aussi la floraison et la fructification le même jour : on voit déjà, en s'en tenant aux données même les plus simples, combien de rapprochements curieux peuvent être déduits d'un système d'observations simultanées, établi sur une grande échelle. Les phénomènes relatifs au règne animal, ceux particulièrement qui concernent les migrations des oiseaux voyageurs, n'offriraient pas des résultats moins remarquables.

» Les phénomènes périodiques peuvent être partagés en deux grandes classes : les uns appartiennent aux sciences physiques et naturelles; les autres sont plutôt du domaine de la statistique et concernent l'homme, vivant au milieu de l'état social; car la société elle-même, avec ses tendances à se soustraire le plus possible aux lois naturelles, n'a pu échapper à cette périodicité qui nous occupe.

» Les phénomènes périodiques *naturels* sont en général indépendants des phénomènes périodiques *sociaux;* mais il n'en est pas de même de ceux-ci à l'égard des premiers. Ce serait donc avoir fait un premier pas sur ce terrain si peu défriché, et qui semble promettre tant aux travaux de ceux qui sauront l'exploiter, que d'avoir commencé l'étude simultanée de tous les phénomènes périodiques qui se rattachent aux sciences physiques et naturelles.

» Ces derniers phénomènes eux-mêmes se divisent en plusieurs classes, et leur étude présuppose une connaissance assez approfondie des phénomènes météorologiques dont ils dépendent principalement. Aussi n'est-ce pas sans raison que la météorologie a dû prendre l'initiative et commencer cette série de recherches continues, auxquelles devront désormais se livrer les observateurs qui aspirent réellement à suivre la nature dans toutes ses lois d'organisation et de développement.

» Cependant la météorologie, malgré ses travaux persévérants, n'a pu reconnaître jusqu'à présent que l'état moyen des différents éléments scientifiques relatifs à l'atmosphère, et les limites dans lesquelles ces éléments peuvent varier en raison des climats et des saisons. Il faut

qu'elle-même continue sa marche parallèlement avec l'étude qu'il s'agit de faire; et que, pour diriger nos jugements sur les résultats observés, elle nous montre, à chaque pas, si les influences atmosphériques sont à l'état normal, ou bien si elles manifestent des anomalies.

» Le désir de me livrer sur une échelle un peu étendue à l'étude des phénomènes périodiques, m'avait porté à prier plusieurs savants nationaux et étrangers de m'aider de leurs lumières et de leurs observations. L'accueil favorable qui a été fait à mes demandes, m'a permis de croire que je ne m'étais pas trompé sur l'importance des recherches projetées; je vis même qu'il serait possible de comparer ainsi notre climat à ceux des pays voisins, par des observations directes et simultanées, et d'obtenir, pour la Belgique en particulier, des documents précieux qui nous manquent encore.

» Cependant, pour procéder d'une manière utile, il faut avant tout observer d'après un même plan, et ce n'est pas sans raison que les savants auxquels je m'adressai, demandèrent généralement des instructions sur les objets à observer et sur la marche à suivre dans les observations pour les rendre *comparables*, qualité essentielle pour le but qu'il s'agissait d'atteindre. »

Ces instructions ont été favorablement accueillies dans les différents pays, et traduites dans différentes langues; je citerai particulièrement les traductions faites en russe par M. Kupffer, en allemand par MM. Mahlmann et Ch. Ritter dans le Bulletin de la Société géographique de Berlin, et par la Société botanique de Ratisbonne dans son journal.

Je saisis avec empressement l'occasion qui se présente ici, pour remercier les savants nombreux qui ont bien voulu m'aider dans cette croisade scientifique, et qui m'ont fait part de leurs observations. Ce sont :

Pour la Belgique : MM. Blancquart, Cantraine, De Broe, De Selys-longchamps, Deville, Donckelaer, Forster, Galeotti, Kickx, Mac-Leod, Martens, Ch. Morren, Nève père, Robyns, Schwann, Spring, Spae, Van Beneden, Vincent, Wesmael, etc.;

Pour le royaume des Pays-Bas : MM. Bergsma, Brants, Breitenstein, Martini Van Geffen, Reinwardt, le baron Thoe Schwartzenberg, Staring, Van Hall, Van Rees, Vrolik père;

Pour la France, MM. Bravais, Decaisne, Benoist, Fleurot, le baron d'Hombres Firmas, Valz;

Pour la Suisse, MM. Agassiz, Chavannes, Delpierre, Espérandieu, Élie Wartmann;

Pour l'Angleterre, MM. sir Dugald Brisbane, Broun, Birt, Blackwall, Jonathan Couch, Léonard Jenyns;

Pour l'Allemagne, MM. Brennecke, Léopold de Buch, de Martius, Lommler, Schmid;

Pour l'Italie, MM. Achille Costa, Colla, Passerini, Rondani, Scherer, Zantedeschi.

LETTRE XXIX, page 208.

« La mortalité subit, à environ six mois de distance, un *maximum* et un *minimum*. »

Le *maximum* arrive en janvier et le *minimum* en juillet. Entre ces termes, les autres nombres croissent et décroissent régulièrement. C'est ce que l'on peut voir par le tableau suivant, qui exprime la mortalité en Belgique pendant les différents mois de l'année, et en faisant la distinction du séjour des villes et des campagnes.

MOIS.	1815 à 1826.		1841.		1842.		1843.	
	VILLES.	CAMPAGN.	VILLES.	CAMPAGN.	VILLES.	CAMPAGN.	VILLES.	CAMPAGN.
Janvier .	1,16	1,21	1,18	1,30	1,26	1,41	1,07	1,12
Février .	1,09	1,20	1,19	1,32	1,20	1,31	1,10	1,25
Mars. .	1,05	1,19	1,10	1,15	1,10	1,17	1,17	1,32
Avril. .	1,00	1,12	1,12	1,17	1,12	1,17	1,05	1,17
Mai . .	0,95	0,98	0,95	0,98	1,00	0,95	1,01	1,05
Juin . .	0,90	0,88	0,92	0,89	0,95	0,87	0,91	0,95
Juillet .	0,87	0,81	0,84	0,79	0,83	0,77	0,88	0,83
Août. .	0,91	0,82	0,83	0,76	0,92	0,80	0,91	0,74
Septemb.	0,97	0,89	0,97	0,84	0,94	0,92	0,97	0,83
Octobre .	1,00	0,93	0,93	0,88	0,87	0,86	0,96	0,89
Novemb.	1,02	0,94	0,98	0,94	0,89	0,88	0,96	0,91
Décembr.	1,08	1,03	1,00	0,99	0,92	0,89	1,01	0,94

LETTRE XXXII, page 242.

En nommant t, t_1, t_2, etc., les températures observées de jour en jour, on aurait

$$\Sigma t_n,$$

pour exprimer les sommes des températures qui amènent la floraison d'une plante au jour $n^{\text{ième}}$, depuis l'époque qui sert de point de départ et que je nomme l'instant du réveil.

D'après ma manière de compter, on aurait

$$\Sigma t_n^2;$$

ou mieux

$$\Sigma t_n^2 + C.$$

Cette constante C dépend de l'état où se trouve la plante au moment du réveil, et par conséquent de l'hiver et de l'arrière-saison qui ont précédé. C'est encore une considération que Cotte avait cru pouvoir négliger, et à laquelle je pense qu'il faut avoir égard.

De la manière de calculer que je propose, résulte le corollaire suivant, qui peut donner lieu à des observations intéressantes.

Les variations de température sont, toutes choses égales d'ailleurs, plus favorables qu'une température uniforme, pour activer la végétation. Je m'explique; s'il est vrai qu'il faille tenir compte des températures, en prenant leur seconde puissance et non la première, il devient évident qu'une même température moyenne sera plus ou moins efficace, selon qu'elle résultera de variations thermométriques plus ou moins grandes. On conçoit néanmoins que ces variations de température ne doivent point être portées au delà de certaines limites, qui varient probablement selon la contexture plus ou moins délicate des plantes. L'expérience ne nous apprend pour ainsi dire rien sur ce sujet intéressant.

Cependant M. le baron de Humboldt, dont les travaux ont tant contribué à étendre le cercle de nos connaissances relativement à l'étude de notre globe, a bien voulu me citer plusieurs exemples qui viennent à l'appui de ce corollaire; et particulièrement la manière dont on cul-

tive, à Berlin, de magnifiques orangers qui appartiennent au roi de Prusse. Je m'appuie de l'autorité de cet illustre savant, parce qu'il m'a autorisé à le faire.

Je donnerai ici la démonstration du principe énoncé précédemment.

Soit T la moyenne des températures diurnes t, t', t'', etc.; et soient Δ, Δ', Δ'', etc., $-\Delta'''$ $-\Delta^{\text{IV}}$, — etc., les variations ou les écarts des températures t, t', t'', etc., par rapport à cette moyenne T, on aura

$$\begin{aligned}
t^2 &= (T + \Delta)^2 = T^2 + 2\Delta T + \Delta^2, \\
t'^2 &= (T + \Delta')^2 = T^2 + 2\Delta' T + \Delta'^2, \\
&\vdots \\
t'''^2 &= (T - \Delta''')^2 = T^2 - 2\Delta''' T + \Delta'''^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma t^2 = nT^2 + 2T(\Delta + \Delta' + \Delta'' + \text{etc.} - \Delta''' - \Delta^{\text{IV}} - \text{etc.}) + \Sigma\Delta^2.$$

Mais, d'après la propriété de la moyenne, on doit avoir

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + \text{etc.} - \Delta''' - \Delta^{\text{IV}} - \text{etc.} = o,$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\Sigma t^2 = nT^2 + \Sigma\Delta^2.$$

En conservant à T la même valeur, le dernier membre deviendra un *minimum* quand $\Sigma\Delta^2$ sera nul, c'est-à-dire quand il n'y aura plus de variation. Ainsi, la somme des carrés des températures Σt^2 sera la plus petite possible, la température moyenne T de la période restant la même, quand les variations Δ seront nulles.

—

Lettre XXXV, page 268.

« On s'est généralement fort bien entendu, quand on a fait de la sta-

tistique, mais il n'en a pas été de même quand il a fallu définir cette science. »

Il ne peut entrer dans mes vues de faire connaître, ici, toutes les définitions qui ont été données de la statistique, et encore moins d'en discuter la valeur. Je crois devoir remarquer cependant que les statisticiens ont été assez généralement divisés sur un point essentiel. Les uns voudraient tout réduire à des nombres et faire consister la science dans un vaste recueil de tableaux; d'autres, au contraire, semblent craindre les nombres et ne les regardent que comme donnant des idées incomplètes et superficielles des choses. Ces deux excès seraient également nuisibles; mais il est vrai de dire que, quand des résultats peuvent être appréciés par des chiffres, c'est toujours aux chiffres qu'il faudra recourir pour avoir des appréciations exactes et des résultats comparables.

D'autres, et particulièrement le savant économiste J.-B. Say, voudraient exclure de la statistique tout ce qui n'est point essentiellement variable. « Il s'agit pour cette science, dit-il, de constater comment sont les choses dont l'état peut changer successivement et non un état de choses immuable. » Cette définition, très-ingénieuse du reste, a été souvent combattue comme étant trop restreinte.

Mon savant ami, le Dr Villermé, qui a enrichi la statistique de nombreux travaux, a donné de cette science une définition qui me paraît très-suffisante; seulement j'aurais désiré qu'il n'en eût point exclu l'idée du temps, qui semble essentielle. Voici comment s'exprimait M. Villermé, en ouvrant un cours de statistique à l'athénée royal de Paris: « La statistique est l'exposé de l'état, de la situation, ou, comme l'a dit Achenwall, de tout ce qu'on trouve d'effectif dans une société politique, dans un pays, dans un lieu quelconque. Mais on est convenu que cet exposé, dégagé d'explications, de vues théoriques, de tout système, et consistant, pour ainsi dire, en un simple inventaire, doit être rédigé de telle façon, que l'on compare aisément tous les résultats, qu'on les rapproche facilement les uns des autres, qu'on aperçoive leur dépendance mutuelle et que les effets généraux des institutions, le bonheur ou le malheur des habitants, leur prospérité ou leur misère, la force ou la faiblesse du peuple, puissent s'en déduire. »

Schlözer, de Göttingue, en rapprochant la statistique de l'histoire,

cherche à faire apprécier la ligne de démarcation que la considération du temps établit entre ces deux sciences. « L'histoire, dit-il, est la statistique en mouvement, et la statistique est l'histoire en repos, *Geschichte ist eine fortlaufende Statistik, und Statistik eine stillstehende Geschichte.* » Et il ajoute que l'histoire est le tout, et que la statistique en est une partie.

Le savant géographe, M. Adrien Balbi, a cherché à faire apprécier, de son côté, la distinction qu'il convient d'établir entre la statistique et la géographie.

M. Théodore Fix a publié récemment dans le *Journal des économistes*, septembre 1845, un article intitulé : *De la manière d'observer les faits économiques*, qui contient des vues très-sages sur les défauts ordinaires des statistiques. L'auteur pourrait peut-être faire croire parfois à un dédain bien marqué pour la statistique, s'il ne prenait soin de nous dire lui-même : « Nous nous élevons seulement contre la mauvaise disposition des statistiques, contre l'intempérance et l'incurie avec lesquelles on accumule des chiffres, et contre la prétention de quelques hommes qui se croient économistes, uniquement parce qu'ils ont colligé des faits et aligné des nombres avec plus ou moins de discernement. »

LETTRE XXXVII, page 282.

« Quelques écrivains ont encore distingué les sources, d'après le degré de confiance qu'elles méritent, en sources *primaires* et sources *secondaires*. »

M. le professeur Mone, dans sa Théorie de la statistique, établit de plus les sous-divisions suivantes :

Sources primaires :

I. Chartes et traités.
II. Publications officielles.

Sources secondaires :

I. Ouvrages publiés par des nationaux.
II. Relations de voyages, écrites par des étrangers.
III. Journaux quotidiens et écrits périodiques.
IV. Correspondance.

M. J. Fallati, dans son ouvrage *Einleitung in die Wissenschaft der Statistik*, Tubingue, 1843, divise la statistique en concrète, abstraite et pragmatique. Le même savant admet ensuite un grand nombre de sous-divisions, selon que les recherches de la statistique s'appliquent à des parties plus ou moins complètes de l'organisation sociale, à des portions plus ou moins étendues de l'univers.

M. Dufau, dans son *Traité de statistique*, Paris, 1840, partage la statistique en générale, particulière, locale et spéciale. « Nous disons que la statistique est *générale*, lorsqu'elle traite d'objets de toute nature et comprend toutes les contrées..... Nous l'appelons *particulière*, lorsqu'elle ne se rapporte qu'à une seule contrée, comme la France ou l'Angleterre; *locale*, lorsque les faits qu'elle embrasse ne concernent qu'une ville ou une circonscription territoriale, telle qu'une province ou un département; enfin la statistique prend le nom de *spéciale*, lorsqu'elle s'applique exclusivement à une classe de faits. La nature même des objets dont il s'agit détermine, dans cette dernière, les divisions et subdivisions suivantes : la statistique *physique*, *météorologique*, *médicale*, etc., » page 83.

Lettre XLIII, page 335.

« Il s'établit alors un rapport constant entre ces trois choses : le nombre général des crimes commis, le nombre des crimes connus et le nombre des crimes poursuivis. »

Supposons que la lettre C représente tous les crimes commis dans une province, ceux qui ont été poursuivis comme ceux qui ne l'ont pas été, et que c représente seulement le nombre des crimes qui ont été poursuivis. Le rapport $\frac{c}{C}$ donnera la mesure de la répression dans cette province; il indiquera combien de crimes ont été poursuivis sur le nombre des crimes commis et parvenus à la connaissance de la justice. Si l'on a des raisons de croire que la répression $\frac{c'}{C'}$ dans une autre province soit la même, ces deux rapports seront égaux et l'on aura

$$\frac{c}{C} = \frac{c'}{C'}; \quad \text{on tire de là } \frac{c}{c'} = \frac{C}{C'};$$

c'est-à-dire qu'il existe d'une province à l'autre le même rapport entre les crimes commis et poursuivis qu'entre tous les crimes en général.

On peut voir à ce sujet des réflexions très-judicieuses insérées par M. Alphonse Decandolle dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, avril 1850, article : *Revue des progrès de la statistique.*

—

Lettre XLIV, page 348.

« Je les extrais d'un opuscule que je viens de recevoir, etc. »

En rendant compte dans la *Revue médicale de Paris*, cahier de novembre 1840, d'un ouvrage de M. Gavarret intitulé : *Principe généraux de statistique médicale*, M. le Dr Martins a fort bien fait comprendre l'utilité dont peut être la statistique dans les sciences médicales, et son insuffisance dans bien des occasions. Il est évident que la plupart des discussions si animées qui se sont élevées à ce sujet dans presque toutes les académies et les sociétés de médecine, reposent sur des méprises ou sur des prétentions excessives de quelques statisticiens. MM. Villermé, Benoiston de Châteauneuf, Louis, Andral, Magendie, Civiale, Mélier, Lévy, Lélut, Leuret, Mitivié, Falret, Bazin, Lombard, Mallet, D'espine, Parchappe, etc., ont fait voir, en France et à Genève, les avantages qu'on peut retirer, en médecine, d'études statistiques bien dirigées; en Allemagne, MM. Burdach, Casper, Carus, Tiedeman, Riecke, Friedlander, Heyfelder, Valentin, Schwann, Gluge, etc. L'Angleterre, toujours si prompte à voir le côté utile des choses, l'Italie, et la plupart des autres pays civilisés, comptent également un bon nombre de médecins instruits qui ont fait un heureux emploi de la statistique.

—

Lettre XLVI, page 364.

« La Belgique et le Piémont sont entrés les premiers dans cette voie. »

On sera sans doute charmé de trouver, ici, l'exposition des motifs qui ont amené la création de la commission centrale de statistique de Belgique.

« Sire,

» En créant au ministère de l'intérieur un bureau central de statis-

tique, le Gouvernement provisoire se proposait de mettre l'administration à même de recueillir et de classer dans un ordre méthodique, des documents précis et complets sur tous les points qui doivent faire l'objet de cette branche importante de la science gouvernementale.

» Mais peu à peu l'on s'est écarté de ce but. Quelques départements négligèrent complétement la statistique; les autres y travaillèrent isolément, puisant parfois aux mêmes sources, se rencontrant et se croisant dans leurs recherches. Ce défaut d'ensemble devait amener inévitablement des disparates, des doubles emplois et des lacunes. Néanmoins, les publications partielles émanées des différents départements se distinguent par un mérite réel. Les comptes rendus, si intéressants au point de vue moral, de la justice criminelle, la statistique territoriale, les tableaux du commerce, les documents généraux dont cinq volumes ont déjà paru, sont des travaux d'une haute portée et qui attestent, à chaque période, un nouveau progrès de l'administration.

» Mais ce qui manque à notre statistique, pour que la science et le Gouvernement puissent en retirer tous les fruits qu'on est en droit de désirer après tant d'efforts, c'est une direction unitaire, c'est un but précis, ce sont des bases d'investigations parfaitement déterminées. La mesure que je viens proposer à Votre Majesté aurait pour résultat d'assurer désormais ces qualités essentielles à la statistique.

» Il serait créé une commission centrale de statistique.

» Chaque département y serait représenté par un ou par plusieurs délégués, que le ministre choisirait parmi les employés qui ont fait une étude spéciale et approfondie des branches de statistique dépendantes de son département. La réunion de ces délégués serait présidée par un homme de science, versé dans l'économie sociale et habitué à résumer les travaux de statistique.

» La nature de la tâche de la commission centrale de statistique se déduit aisément de ce que j'ai dit plus haut des défectuosités du système actuel : faire converger vers un centre commun tous les renseignements épars que recueillent aujourd'hui les diverses administrations, tel doit être le but de ses travaux.

» Ainsi, elle signalera les lacunes et les détails superflus des publications actuelles.

» Elle proposera les modèles des états et des tableaux destinés à recueillir et à classer les éléments de ces publications.

» Elle veillera à ce que tout double emploi soit évité dans les demandes de renseignements et dans les publications elles-mêmes.

» Elle correspondra directement avec le ministre de l'intérieur; elle lui soumettra ses observations et ses propositions, avec les instructions nécessaires pour chaque département. Le ministre de l'intérieur communiquera les vues de la commission à ses collègues, qui resteront libres de les adopter ou de les modifier.

» Chaque département continuera à publier la statistique qui le concerne; mais un plan uniforme ayant été adopté préalablement, l'unité et l'ensemble seront substitués à la divergence des publications actuelles.

» C'est avec l'assentiment unanime de mes collègues, Sire, que je viens soumettre ce projet à la sanction de Votre Majesté.

» Si, comme il est permis de l'espérer, la commission remplit dignement le but que nous nous proposons en l'instituant, le Gouvernement, les Chambres législatives, le pays, trouveront dans les publications statistiques officielles des faits authentiques propres à éclairer toutes les discussions, à provoquer des travaux utiles, à faire apprécier, chaque année, la situation, les forces et les ressources matérielles et morales du royaume.

» *Le Ministre de l'Intérieur,*

» LIEDTS. »

L'arrêté royal portant institution de la commission, était conçu en ces termes :

LÉOPOLD, ROI DES BELGES,

A TOUS PRÉSENTS ET A VENIR, SALUT :

« Vu l'arrêté du Gouvernement provisoire de la Belgique, en date du 24 janvier 1831, chargeant le ministre de l'intérieur de la rédaction d'une statistique générale du royaume;

» Voulant régulariser et étendre les publications statistiques des différents départements ministériels;

» Sur le rapport de notre ministre de l'intérieur, et de l'avis des autres chefs de département,

» Nous avons arrêté et arrêtons :

» Art. 1er. Il est institué près du ministère de l'intérieur une commission centrale de statistique, dont les membres, pris, autant que possible, parmi les fonctionnaires des différents ministères, seront nommés par nous.

» Art. 2. La commission sera renouvelée par tiers tous les deux ans, à partir du 1er janvier 1843. La sortie aura lieu par ordre d'ancienneté, ou, en cas de parité, par voie du sort.

» Les membres sortants pourront être maintenus.

» Art. 3. La commission proposera un plan complet pour la publication des documents statistiques concernant les différentes branches de l'administration.

» Art. 4. Elle avisera sur toutes les communications qui lui seront adressées par notre ministre de l'intérieur.

» Elle correspondra directement avec ce ministre.

» Art. 5. Le mode d'exercice de ses attributions et l'ordre de ses travaux seront déterminés par un règlement spécial, rédigé par le ministre de l'intérieur, de concert avec les chefs des autres départements, et qui sera soumis à notre approbation.

» Art. 6. Il lui sera alloué une somme pour jetons de présence et frais de bureau.

» Art. 7. Notre ministre de l'intérieur est chargé de l'exécution du présent arrêté.

» Donné à Bruxelles, le 16 mars 1841.

» LÉOPOLD. »

Quelque temps après, l'arrêté suivant fut pris, sur la proposition de M. Nothomb, alors ministre de l'intérieur, et compléta l'organisation de la statistique dans le royaume.

LÉOPOLD, roi des Belges,

A tous présents et a venir, salut :

« Vu l'article 3 de notre arrêté du 20 octobre 1841, ainsi conçu :

» § 1er. « Des commissions provinciales ou locales de statistique peuvent être établies. »

» Par dérogation au second paragraphe dudit article, ainsi conçu :

» § 2. « Les membres de ces commissions sont nommés par le ministre de l'intérieur, sur la proposition de la commission centrale. »

» Sur la proposition de notre ministre de l'intérieur,

» NOUS AVONS ARRÊTÉ ET ARRÊTONS :

» ART. 1er. Il est établi au chef-lieu de chacune des provinces du royaume une commission chargée de coopérer aux travaux de la commission centrale de statistique.

» ART. 2. Les commissions provinciales de statistique seront renouvelées par tiers tous les deux ans, à partir du 1er janvier 1845. La sortie aura lieu par ordre d'ancienneté, ou, en cas de parité, par voie du sort. Les membres sortants pourront être maintenus.

» Chaque commission ne pourra compter plus de douze membres, ni moins de six, non compris le président.

» ART. 3. Le gouverneur est, de droit, président de la commission de statistique de sa province. Il peut se faire remplacer par un membre de la députation permanente du conseil provincial.

» La commission nomme un vice-président, pour les cas d'absence du gouverneur et de son délégué.

» Elle choisit son secrétaire parmi ses membres.

» ART. 4. Les commissions surveillent et coordonnent les travaux statistiques dans les provinces; elles font recueillir les renseignements qui leur sont demandés ou qu'elles jugent utile de rassembler, et donnent leur avis sur les documents qui leur sont transmis officiellement.

» ART. 5. Les gouverneurs désignent, s'il y a lieu, des employés du gouvernement provincial pour travailler sous la surveillance et le contrôle des commissions. Ces employés demeurent sous l'autorité des gouverneurs, qui, pour assurer l'exécution du travail, donnent seuls les ordres qu'ils jugent convenables.

» ART. 6. Les gouverneurs mettent à la disposition des commissions un local pour leurs séances et les fournitures de bureau.

» Il pourra leur être alloué de ce chef, concurremment avec les sommes affectées aux travaux statistiques sur les budgets provinciaux, un subside imputable sur le crédit porté au budget du département de l'intérieur pour les frais de publication de la statistique générale.

» Art. 7. Dans les trois mois qui suivront l'installation des commissions, elles adresseront un projet de règlement d'ordre et d'attributions au ministre de l'intérieur, qui l'arrêtera, après avoir entendu la commission centrale.

» Art. 8. Notre ministre de l'intérieur est chargé de l'exécution du présent arrêté.

» Donné à Bruxelles, le 6 avril 1843.

» LÉOPOLD. »

La Commission a publié jusqu'à présent, sous le titre de *Bulletin*, deux volumes in-quarto de ses mémoires et de ses procès-verbaux; elle a dirigé, de plus, la publication de cinq volumes sur la population et le mouvement de l'état civil, dont la rédaction est confiée à M. Heuschling, secrétaire de la commission.

Lettre XLVI, page 364.

Plusieurs États ont des bureaux statistiques bien organisés et dirigés par des hommes habiles. Il convient de citer surtout celui de Berlin, qui s'est placé en première ligne, grâces aux talents de MM. Hoffmann et Dietrici; celui de Londres, dont M. Porter est le directeur; ceux de la Bavière, du Wurtemberg, du grand-duché de Bade, etc.; dans les diverses administrations de France, on trouve également des savants pleins de zèle, chargés de la publication des documents officiels; il est à regretter seulement qu'il n'existe aucun lien entre eux.

Différentes sociétés se sont organisées aussi pour donner du développement aux études statistiques. Celle de Londres compte un grand nombre d'hommes distingués, qui ont contribué, par leurs écrits et par la publication d'un journal, à donner une puissante impulsion à cette science. Des sociétés semblables ont été établies à Glasgow, à Manchester, à Paris, à Francfort, à Lubeck, en Prusse, en Saxe, dans le grand duché de Hesse-Darmstadt, etc.

La statistique a reçu également de l'appui par l'organisation de cours destinés à l'enseignement de cette science, surtout en Allemagne, où elle a eu, pour organes, MM. Schubert, Schnabel, Schoen, R. Von

Mohl, F.-B. Weber, Voigtel, L. Moser, Rau, Bernouilli, Fraenzl, etc. En France, cette science est enseignée au conservatoire des arts et métiers par M. le baron Charles Dupin, dont les travaux ont tant contribué à faire connaître la France agricole et manufacturière. M. Ramond de la Sagra a cherché, de son côté, à lui donner de la popularité en Espagne.

—

Lettre XLV, page 353.

« Il y a donc un *maximum* que l'on peut atteindre et qu'on ne déterminera qu'à l'aide de bons documents statistiques. »

Nommons x le prix des places et y le nombre des voyageurs qui correspond à la fixation de ce prix. On aura, entre x et y, une relation

$$y = f(x).$$

Mais si le tarif pour le prix des places a changé plusieurs fois, et que les autres circonstances d'ailleurs sont restées les mêmes, on aura les coordonnées d'autant de points de la courbe représentée par l'équation précédente. Ces points peuvent aider à construire et à calculer empyriquement la courbe, et par suite à en déduire les valeurs *maxima* et *minima* de l'ordonnée.

L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire, c'est de supposer que le nombre des voyageurs augmente à mesure que le prix des places diminue, ou plutôt qu'il est en raison inverse de ce prix. Dans ce cas, l'équation serait

$$y = \frac{a}{x}; \quad \text{d'où} \quad y.x = a.$$

Ce qui indique l'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Pour $x = o$ on aurait $y = \infty$; c'est-à-dire, en supposant nul le prix des places, le nombre des voyageurs serait infiniment grand. D'une autre part, en faisant $x = \infty$, on aurait $y = o$, c'est-à-dire en supposant le prix infiniment grand, le nombre des voyageurs serait

nul. On conçoit que ces hypothèses mathématiques ne se réaliseront pas, et que les observations ne porteront jamais sur ces extrêmes limites; on conçoit encore que, dans le plus grand nombre de cas, la courbe ne s'éloignera pas trop de l'hyperbole équilatère.

Il serait à désirer qu'on employât plus souvent les constructions géométriques pour représenter l'influence que peuvent avoir les prix sur certains éléments sociaux avec lesquels ils sont en rapport. On pourrait en tirer de grands avantages.

FIN DES NOTES.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Sur la théorie des probabilités.

Pages.

1re Lettre. Nos connaissances et nos jugements ne sont fondés, en général, que sur des probabilités plus ou moins grandes qu'il faut savoir apprécier. . 1

La théorie des probabilités a été cultivée par les penseurs les plus profonds; — n'est point enseignée dans nos écoles; — nécessité de cette étude. — Il y a une infinité d'intermédiaires entre l'impossible et le certain. — La Théorie des probabilités permet d'exprimer avec plus de précision les résultats de l'expérience.

2e Lettre. De la probabilité mathématique d'un événement simple. Difficulté de rendre les chances égales. 10

Chances favorables, chances contraires d'un événement; — possibilité, probabilité, certitude; — probabilité *mathématique*, représentée par une fraction; — le hasard; — le nombre des chances d'un événement peut être déterminé ou indéterminé.

3e Lettre. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite se reproduira encore. 16

Principe pour calculer la probabilité du retour d'un événement observé plusieurs fois de suite; — exemples des marées, du coucher du soleil; — quand les prévisions s'étendent un peu loin, la probabilité décroît rapidement.

4e Lettre. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite dépend d'une cause qui facilite sa reproduction. 23

Règle pour calculer la probabilité qu'il existe une cause à la reproduction d'un événement observé plusieurs fois de suite. — Exemples des marées, des étoiles filantes du 10 août.

5e Lettre. De la probabilité qu'un événement observé un certain nombre de fois, dans un nombre donné d'épreuves, se reproduira encore. 27

Règle pour calculer la probabilité; — exemple du mouvement des planètes; — considération qui simplifie les calculs; — avantage de la répétition des épreuves. — Exemples : rapport des naissances masculines et féminines; variations barométriques à l'approche de la pluie.

Pages.

6e Lettre. De la probabilité mathématique d'un événement composé. . . . 34

Ce qu'on entend par événement composé; — règle pour calculer la probabilité d'un événement composé; — exemples; — la probabilité décroît très-rapidement; — exemple pris dans les tables de mortalité.

7e Lettre. De l'espérance mathématique. Loteries, sociétés d'assurances. . 40

Origine du calcul des probabilités; — règle des paris; — loterie génoise; — principe pour que le jeu soit équitable; — sociétés d'assurances.

8e Lettre. De l'espérance morale; remarques de Buffon à ce sujet. . . . 48

Valeur morale d'une somme; — le jeu le plus équitable est défavorable aux joueurs; — conséquences; — remarques de Buffon.

9e Lettre. Comment il faut envisager le calcul des probabilités. De l'accord entre la théorie et l'expérience. 54

L'accord entre la théorie et l'expérience n'est qu'accidentel; — principe de Jacques Bernoulli; — la précision du résultat dépend du nombre des observations; — vérification du principe par l'expérience.

DEUXIÈME PARTIE.

Des moyennes et des limites.

10e Lettre. Des moyennes et des limites en général. 59

Des moyennes et des limites; — règle pour calculer une moyenne; — l'idée des moyennes existoit chez les anciens.

11e Lettre. Des moyennes proprement dites et des moyennes arithmétiques . 64

12e Lettre. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans les sciences politiques. 70

La moyenne arithmétique est fréquemment employée dans la statistique; — exemple du prix des grains; — limites de la variation du prix; — elles se resserrent par la civilisation; — les extrêmes sont généralement dangereuses.

13e Lettre. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans la météorologie. 74

Température moyenne du jour; — du mois; — température moyenne et températures extrêmes du jour, à Bruxelles, pendant le mois de juillet; — variations diurnes; — elles suivent une loi; — elles varient selon les saisons; — variations mensuelles et annuelles.

14e Lettre. Loi de sortie de deux espèces d'événements simples dont les chan-

Pages.

ces sont égales et les combinaisons peu nombreuses. Accord de la théorie et de l'expérience 87

Loi de sortie de deux événements simples qui se combinent de deux, trois à treize manières différentes; — probabilités des combinaisons; — tableau; — conséquences de ce tableau; — accord de la théorie et de l'expérience.

15e Lettre. Loi de sortie de deux espèces d'événements simples, dont les chances sont égales, et qui se combinent d'un nombre considérable de manières; échelle de possibilité; sa construction 98

16e Lettre. L'échelle de possibilité est d'un usage général. 105

Loi de sortie de deux événements simples qui se combinent d'un nombre infini de manières; — explication de la théorie par l'expérience; — échelle des probabilités relatives.

17e Lettre. Théorie des moyennes. 113

Ordre déterminé dans les erreurs d'observation; — cet ordre est calculable *à priori*; — courbe figurative des erreurs; — rapports entre la théorie des moyennes et celle des balances; — avantages de représenter par une ligne une succession d'observations.

18e Lettre. Des moyennes proprement dites. Échelle de précision. Erreur probable. Module de précision. 119

19e Lettre. Exemple de l'emploi de la théorie des moyennes emprunté à l'astronomie 124

Précision des observations astronomiques; — observation des ascensions droites de la polaire, à Greenwich; — probabilité des écarts d'après l'observation; — tableaux numériques; — erreur probable des observations.

20e Lettre. Reconnaître si une moyenne arithmétique est véritablement moyenne. Type de la taille humaine. 133

Erreurs des mesures sur une statue; — sur le corps humain; — mesures des poitrines des soldats écossais; — écart probable; — il existe un type humain; — preuves.

21e Lettre. Chaque race d'hommes a son type particulier. Explication de cette théorie. 139

Objection contre l'application de l'échelle de possibilité aux mesures de l'homme; — réponse; — mesures des conscrits français; — erreur probable; — application de l'échelle de possibilité au type humain; — on peut, pour le degré de précision, comparer des séries d'observations non homogènes; — on peut changer une série d'observations en une autre exprimée par une nouvelle unité de mesure; — rétablir une série d'observations au moyen de quelques éléments dont elle se compose.

22e Lettre. Événements ordinaires, extraordinaires. Monstruosités. . . . 149

Définition plus précise des mots grand, petit; — cas extraordinaires; — cas ordinaires; — monstruosités; — limites; — applications à la taille de l'homme; — nains, géants, — remarques au sujet du nain *Tom Pouce*.

TROISIÈME PARTIE.

De l'étude des causes.

Pages

23e Lettre. Des causes et de leur appréciation. Causes constantes, causes variables, causes accidentelles. 157

24e Lettre. Des causes en général, et en particulier des causes accidentelles quand les chances sont égales. 161

Effets des causes accidentelles dans les mesures de la taille humaine; — ils procèdent avec régularité; — effets des causes constantes et des causes variables; — variations périodiques.

25e Lettre. Des causes accidentelles, quand les chances sont inégales. . . 168

Remarques de M. G. Edwards sur l'action des causes accidentelles et sur leurs limites; — exemples, — la courbe de possibilité perd sa symétrie; — explications; — appréciation du diamètre apparent des étoiles.

26e Lettre. Loi de sortie de deux événements dont les chances sont inégales . 174

Explication de la théorie par des exemples particuliers; — cas général, courbes de possibilité; — exemple de la variation diurne de température; — mode d'action des causes accidentelles; — leur effet sur les limites.

27e Lettre. Des causes constantes 184

Il est généralement possible de détruire les effets des causes accidentelles; — et de mettre en évidence les effets des causes constantes et des causes variables; — prépondérance des naissances masculines sur les naissances féminines; — influence des villes; — erreurs produites par des négligences.

28e Lettre. Des causes variables 193

Constance apparente des phénomènes célestes; — changements dans les cieux; — sur notre globe; — causes naturelles; causes perturbatrices; — détermination des causes variables; — prix du froment; — population.

29e Lettre. Des causes variables périodiques. 203

Étude des phénomènes périodiques; — système d'observations correspondantes dont Bruxelles est le centre. — Périodicité de certains phénomènes sociaux; — méthode pour reconnaître la périodicité; — pour éliminer les effets des causes périodiques; — couleurs complémentaires; — principales conséquences de la périodicité.

30e Lettre. Sur les causes constantes qu'on peut regarder comme variables. Loi des grands nombres. 213

31e Lettre. De l'étude des causes et de la marche à suivre dans l'observation.

Pages.

On procède des faits généraux aux cas particuliers 217

Étude des causes ; — éliminer des résultats les effets des causes accidentelles, — et ceux des causes variables périodiques ; — causes variables sans périodicité, — causes constantes. — Exemple des mort-nés, — constance du chiffre, — influence du sexe, — du séjour des villes et des campagnes, — de l'illégitimité des naissances, — des saisons.

32e Lettre. De l'étude des causes. On procède du fait particulier au fait général. De la floraison 230

Phénomène général de la floraison, — causes diverses qui l'influencent, — marche à suivre pour l'étudier, — équation personnelle des observateurs.

33e Lettre. Suite de l'étude des causes. Floraison 238

Époque de la floraison du lilas à Bruxelles, — influence de la température, — son estimation d'après Cotte et Réaumur. — Objections contre cette méthode. — Méthode qui emploie les carrés des températures, — son application au calcul de l'époque de la floraison du lilas, — *constante* de la floraison. — Marche à suivre pour déterminer l'influence des causes, — système d'observations combinées, — résultats de Bruxelles comparés à ceux d'autres pays. — Retard dans la floraison pour une différence d'un degré en latitude, — pour une différence de 100 mètres de hauteur, — autre méthode pour calculer le retard par les seules données de la température. — Conséquences de cette méthode.

QUATRIÈME PARTIE.

De la Statistique.

34e Lettre. Des sciences d'observation et de la statistique en particulier . . 257

Sciences d'observation, — sciences naturelles en particulier, — sciences qui appartiennent exclusivement à l'homme. — L'homme peut être considéré sous un triple rapport, comme individu, comme fraction d'un peuple, comme fraction de l'humanité. — Lois conservatrices du corps social.

35e Lettre. La statistique est-elle un art ou une science? 264

Formes qu'ont affectées les sciences à leur origine. — Idées diverses sur la nature de la statistique. — Définition de cette science.

36e Lettre. Objets dont s'occupe la statistique 270

Nécessité d'un bon recensement, — mouvement de la population. — Milices, — territoire, — état politique, — finances. — Statistique agricole, industrielle et commerciale. — Faits que la statistique doit constater annuellement. — Défauts des statistiques en général. — Statistique de l'état moral et de l'état intellectuel. — Paupérisme.

37e Lettre. Des différentes formes qu'affectent les statistiques. 282

Statistiques générales, spéciales, locales, universelles. — Sources primaires, secon-

Pages.

daires. — Statistiques officielles. — Statistiques faites par des particuliers. — Abus des chiffres.

38e Lettre. De la manière de réunir les documents statistiques 288

Différentes parties dont se composent les statistiques. — Précautions à prendre pour poser les questions. — Tous les faits ne doivent pas être constatés chaque année, — n'exigent pas le même nombre d'observations. — Les données statistiques doivent pouvoir être vérifiées. — Format le plus avantageux. — Les données statistiques doivent être comparables. — Remarques sur les rapports et la manière de les écrire.

39e Lettre. Sur la manière de contrôler les documents statistiques 298

Examen moral, — examen matériel, — avantages des constructions graphiques comme moyen de contrôle.

40e Lettre. Manière de mettre en usage les documents statistiques. . . . 307

Recherche des causes influentes; — exemple pour la population; — principales sources d'erreurs dans l'emploi des documents statistiques.

41e Lettre. Il faut faire de la statistique sans idées préconçues et ne négliger aucun chiffre. 314

Abus de la statistique; — choix des chiffres; — méprises sur la nature des causes, — énumération incomplète des causes. — Erreurs faites dans les statistiques morales.

42e Lettre. Peut-on tirer avantage de documents statistiques incomplets? . 321

Degré de précision que comportent les sciences; — infériorité marquée de la statistique. — Des documents statistiques incomplets; — exemple des statistiques criminelles; — comment il faut les employer.

43e Lettre. Il ne faut comparer que les éléments comparables 329

Mortalité comparée, déduite de nombres trop petits. — Erreurs faites en comparant la mortalité dans différents pays. — Erreurs faites en comparant les crimes. — Il faut avoir égard à l'activité de la justice et à la répression.

44e Lettre. De l'emploi de la statistique dans les sciences médicales. . . . 337

Motifs de certaines contradictions chez les médecins. — On ne distingue pas toujours la cause de l'effet. — Les phénomènes sont généralement très-complexes; de là le retard dans les progrès des sciences médicales. — La statistique n'est applicable que dans certains cas; — son utilité. — Exemples de la vaccine, des battements du pouls, etc. — Services rendus par la statistique; — application à la chirurgie; — probabilité du diagnostic; — influence des différents traitements. — L'influence d'une bonne administration dans les hôpitaux est généralement aussi grande que celle des médecins.

45e Lettre. De l'utilité de la statistique pour l'administration 351

Exemples de questions qui se rattachent aux chemins de fer. — Exemple de la taxe

Pages

des lettres en Angleterre. — Côté matériel, côté moral des questions. — Par la statistique, on reconnaît si les lois répondent aux prévisions. — Question des enfants illégitimes. — Faits principaux qu'ont relevés les premières statistiques criminelles. — Utilité de la statistique pour le législateur.

40e Lettre. Des progrès ultérieurs de la statistique. 361

Opinions sur les services rendus par la statistique. — Obstacles aux progrès de cette science. — Impossibilité d'avoir des unités comparables. — Nécessité de régulariser les travaux statistiques. — Les différents pays devraient s'entendre pour avoir des documents recueillis sur un même plan.

—

NOTES.

IIIe Lettre. Probabilités dans les événements répétés. 367
VIIe Lettre. Sur l'origine du calcul des probabilités 370
Même lettre. Sur la loterie 372
XIVe Lettre. Tirage de boules, pour chercher quel est l'accord entre l'expérience et la théorie. 373
XVe Lettre. *Échelles de possibilité et de précision* 375
» » Principes de la construction de ces échelles. 378
» » De la courbe de possibilité. 382
» » Table de M. Cournot. 389
XVIIe Lettre. Théorie des moyennes comparée à la théorie des leviers. . 391
XVIIIe Lettre. De l'erreur probable et du module de précision. . . . 392
» » Théorie des moyennes. Résultats de l'analyse 395
XXe Lettre. Tableau des mesures des circonférences des poitrines des soldats écossais. 400
XXIe Lettre. Tableau de la taille des conscrits français. 401
» » Fraude dans les réformes démontrées par la théorie. . . 402
XXIIe Lettre. Tableau des principales dimensions du nain surnommé *Tom Pouce*. 403
XXIVe Lettre. Sur la distribution des erreurs accidentelles. 405
XXVIe Lettre. Tableau indiquant les probabilités des tirages pour des nombres inégaux de boules blanches et de boules noires. 407
» » Tableau de la variation diurne de la température. . . . 410
» » Trois lettres de M. Bravais sur les erreurs accidentelles. . 412
XXIXe Lettre. Tableau des phénomènes périodiques. 424
» » Système d'observations combinées sur la floraison des plantes. 426

Pages.

XXIXe Lettre. Influence des saisons sur la mortalité. 429
XXXIIe Lettre. Influence de la variation de la température sur la fièvre. 430
XXXVe Lettre. Sur les définitions de la statistique. 431
XXXVIIe Lettre. Sur les différents genres de statistiques. 433
XLIIIe Lettre. Sur le rapport entre les crimes commis et les crimes connus. 434
XLIVe Lettre. Sur l'emploi de la statistique par les médecins. 435
XLVIe Lettre. Sur la commission centrale de statistique de Belgique. . 435
» » Bureaux, sociétés et cours de statistique dans plusieurs pays de l'Europe 440
XLVe Lettre. Relation mathématique entre le prix et le nombre des voyageurs sur les chemins de fer. 441
Table des matières. 443

FIN DE LA TABLE.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

3 2044 019 297 787

THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.

WIDENER
BOOK DUE
FEB 2 4 1998
CANCELLED
1825025
WIDENER
STALL-SECURITY
FEB 2 4 1998
CHARGE

WIDENER
JUL 2 5 2002